وزارة التربية

يونيسف

unrwa

الاونروا

الجبر

الصف التاسع الأساسي

برنامج التعلّم الذاتي

الجبر

برنامج التعلّم الذاتي

الصف التاسع الأساسي

المقدمة

هذه مادة من مواد التعلم الذاتي نقدمها لطلابنا في الصف التاسع وتتضمن التركيز على المهارات الأساسية في كتاب الجبرمادة الرياضيات.

وهذه المادة موجهة للطلاب الذين لم يستطيعوا الوصول إلى المدرسة لتلقي التعليم في الغرفة الصفية لتكون لهم عوناً على التعلّم، كما تساعد الطلاب على التعلَم في حال عدم توفر الكتاب المدرسي.

ويمكن أن يستفيد من هذه المادة المدرس والطالب داخل المدرسة والغرفة الصفية في حال تمكّن الطلاب من الوصول إلى المدرسة، وفي حال توفّر الكتاب المدرسي بين يديه أم لم يتوفر.

علماً أن هذه المادة تسير وفق منهجية الكتاب المدرسي وما تضمنه من وحدات وفصول وأنشطة وتدريبات، وقد أضيفت بعض الأنشطة الإثرائية مع حلولها وبعض التمارين التي تضمنت حلاً جزئياً لتكون عوناً للطالب لإتمام حل التمرين وبقية التمارين والتدريبات .

وكل ما يجده الطالب أوالمدرس من أنشطة وتدريبات وتعليقات غير واردة في الكتاب المدرسي هي عبارة عن إثراء ت أُدخلت إلى هذه المواد لتغنيها وتعين الطلاب على امتلاك المهارات المطلوبة، كما أضيف في نهاية كل وحدة اختبار شامل لها.

ولقد اعتمدت هذه المادة على المصادر الآتية: الكتاب المدرسي – دليل المدرس –

كما تساعد الطلاب على اكتساب المهارات والمعارف والحقائق والمبادئ والقيم والاتجاهات (الواردة في المنهاج المقرر لمادة الرياضيات للصف التاسع)

وهذه المهارات الأساسية هي:

1. تحليل البيانات
2. الأعداد النسبية وغير النسبية
3. الأعداد الحقيقة
4. النسبة والتناسب
5. لغة الجبر
6. المعادلات الخطية
7. التابع
8. طرائق العد

نأمل مراعاة تسلسل الوحدات الواردة في هذه المادة وطريقة بنائها، أي عدم الانتقال من وحدة إلى أخرى قبل الانتهاء من دراسة وفهم الوحدة بشكل كامل. ومن الضروري تخصيص وقت كاف في الأسبوع لمراجعة المواد والموضوعات التي تمت دراستها.

إرشادات لكيفية التعامل مع أوراق التعلم الذاتي لكتاب الجبر

1. بنيت أوراق التعلّم جميعها بروح واستراتيجية واحدة بدءاً من صفحة الوحدة المتضمنة عناوين دروس الوحدة من ثم تسلسل الدروس وكل درس يبدأ بأهداف الدرس تحت اسم (ما ستتعلمه) في هذا الدرس، ومن ثم مادة التعلّم متضمنة المتطلبات الأساسية لكل درس تحت اسم (تذكر) ومن ثم مادة التعلّم الجديدة وبعدها تأتي الأمثلة المحلولة تليها أنشطة محلولة بشكل جزئي على المتعلّم أن يتابع حلها، وكي يختبر الطالب المعلومات والمهارات التي اكتسبها من كل درس عليه حل تدريبات الدرس .

2. يرجى الانتباه الى مراعاة تسلسل الوحدات والدروس في الكتاب أثناء التعلّم والالتزام بحل الأنشطة والتدريبات لكل درس من دروس الوحدة ومن ثم حل تدريبات الوحدة وبعد ذلك يختبر الطالب نفسه ذاتياً ومدى استيعابه لمفاهيم الوحدة بحل اختبار الوحدة الموجود في نهايتها .

3. على المتعلم أن يخصص وقتاً كافياً ومناسباً لدراسة المادة والتدرب على المهارات المطلوبة وذلك يحتاج ما يقارب أربع ساعات أسبوعيا لمادة الجبر .

توصية:

كي يتأكد المتعلم من صحة حلوله في مادة الجبر عليه أن يقارنها بالأمثلة المحلولة في الدروس أوبالتمارين المشابهة لها والمتضمنة إرشادات للحل أويستعين بالمشرف المكلّف إن وجد لتقديم النصح والتوجيهات المناسبة باستعمال طرائق بديلة لتذليل الصعوبات عند المتعلّم .

الفهرس

الوحدة الأولى: تحليل البيانات الإحصائية

الوحدة الثانية: الأعداد النسبيّة والأعداد غير نسبيّة

الوحدة الثالثة: الأعداد الحقيقية

الوحدة الرابعة: النسب والتناسب والنسبة المئوية

الوحدة الخامسة: لغة الجبر

الوحدة السادسة: المعادلات الخطية

الوحدة السابعة: التابع العددي

الوحدة الثامنة: طرائق العد

الدرس الأوّل

مقاييس النزعة المركزية

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

- استخدام مقاييس النزعة المركزية

استخدام مقاييس النزعة المركزية

لإيجاد الوسيط لبيان إحصائي علينا إيجاد موقعه في البيان أي رتبته:

تعلّم

إذا كان عدد المفردات n فإنّ:

1. رتبة الوسيط $= \frac{n+1}{2}$ إذا كان n فردياً .
2. رتبتي الوسطيتين هي $\frac{n}{2}+1$, $\frac{n}{2}$ إذا كان n زوجياً .

مثال محلول 1

لدينا البيان الإحصائي المرتب تصاعدياً:

2, 2, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 8

$n = 9$ (عدد المفردات) فردي عندئذ:

رتبة الوسيط هي: $\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$

أي أن الوسيط هو العدد الخامس في البيان المرتب تصاعدياً

أي أن الوسيط هو: 4

مثال محلول 2

في البيان الإحصائي:

24 15 15 18 17 12 19 20 18 18 20

أوجد كلاً من الوسيط، المتوسط الحسابي، المنوال.

الحلّ

نُرتّبُ البيانات تصاعدياً: $12, \ 15, \ 15, \ 17, \ 18, \ 18, \ 18, \ 19, \ 20, \ 20, \ 24$

رتبةُ الوسيط: $\frac{11+1}{2}=6$

إذاً الوسيط هو: $x=18$

المتوسط الحسابي هو: $\bar{x}=\frac{12+2\times15+17+3\times18+19+20+24}{11}=16$

المنوالُ هو: $M=18$

ملاحظة

1. إن وُجد المنوالُ فهو مفردة من مفردات البيان الإحصائي، وقد يكون للبيانِ أكثرُ من منوال.
2. إنّ الوسيط مفردة من مفردات البيان إذا كان عدد المُفردات فردياً. أمّا إذا كان عدد المُفردات زوجياً فقد لا يكون من المُفردات.
3. قد يكون المتوسّطُ الحسابي أحدّ المُفردات وقد لا يكون .

حاول أن تحلّ

في البيانِ الإحصائي الآتي: $2, \ a, \ b, \ c$ (أعداد طبيعية مرتبة تصاعدياً)

الوسيط = 6، المتوسط الحسابي = 7 .

إذا كان لهذا البيان الإحصائي منوالٌ، فأوجد كلّ منوالٍ يحقق هذا البيان.

ملاحظة

- اعتمد على تعريف كل من الوسيط، المتوسط الحسابي، والمنوال في الحل
- إبدأ بالوسيط وانتبه لعدد مفردات البيان

مسألة محلولة

حول المتوسط الحسابي:

لدينا خمسة أعداد، المتوسط الحسابي للعددين الأول والثاني 12 والمتوسط الحسابي للأعداد الثلاثة الباقية 22، أوجد المتوسط الحسابي للأعداد الخمسة.

الحل

نفرض أن الأعداد الخمسة هي: a, b, c, d, e

المتوسط الحسابي للعددين a, b هو $\frac{a+b}{2}=12$ بالتالي $a+b=2\times 12=24$

المتوسط الحسابي للأعداد الباقية هو $\frac{c+d+e}{2}=22$ بالتالي $c+d+e=3\times 22=66$

ومنه: $a+b+c+d+e=24+66=90$

المتوسط الحسابي للأعداد الخمسة هو: $\bar{x}=\frac{\text{مجموع الأعداد الخمسة}}{5}=\frac{90}{5}=18$

والآن عزيزي الطالب:

تحقق من فهمك

تقدّم 30 طالباً لأداء اختبار في مادة الرياضيات، فإذا كان المتوسّطُ الحسابي لدرجات 20 طالباً هو 45 درجة. ومتوسط درجات الباقي من الطلاب هو 30 درجة، فأوجد المتوسّط الحسابي لدرجات جميع الطلاب.

الدرس الثاني

الرُّبيِّعيات ومخطط الصندوق والساعدين

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. استخدام مقاييس النزعة المركزية
2. مخطط الصندوق والساعدين

أولاً: الرُّبيِّعيات

نشاط 1

في البيان الإحصائي التالي (المرتب تصاعدياً):

2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 7

أكمل

عدد المفردات n = 9 فردي، ومنه:

- رتبة الوسيط ...... = $\frac{.....+1}{2} = \frac{n+1}{2}$
- الوسيط: ...... = x
- الأعداد التي تسبق الوسيط x الوسيط هي: 4، 3، 3، 2 وسيطها يسمى الرُّبيِّع الأول (الأدنى) $Q_1 =$ ....
- الأعداد التي تلي الوسيط هي: 7، 7، 5، 5 وسيطها يسمى الرُّبيِّع الثالث(الأعلى) $Q_3 =$ ....
- كما نسمي وسيط البيان الإحصائي x بالرُّبيِّع الثاني ونرمز له بـ Q_2

نشاط 2

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي على درجات 16 تلميذاً في الصف التّاسع في مادة التربية الوطنية (العلامة من 20) العلاماتُ مرتبة تصاعدياً:

5 8 10 10 12 12 12 14 16 16 17 18 18 20 20 20

أكمل

عددُ المفردات 16 (زوجي)، رتبتا المفردتين الوسطيتين هما: $\frac{16}{2}=8, \quad \frac{16}{2}+1=9$

- الوسيط هو: $Q_2=\frac{14+......}{2}=......$
- الرُّبيّع الأوّل (الأدنى) هو: $Q_1=\frac{......+......}{2}=......$
- الرُّبيّع الثالث (الأعلى) هو: $Q_3=\frac{......+......}{2}=......$

أشر إلى كلّ من Q_1, Q_2, Q_3 في مكانها تجد أنّ الرُّبيّعات تُقَسِمُ البيان الإحصائيّ إلى أربعة أقسام متساويةٍ.

تعلّم

يسمّى الوسيط x الرُّبيّع الثاني (الأوسط) ويرمّز Q_2 .

Q_1 هو وسيط المفردات الأصغر من Q_2 .

Q_3 هو وسيط المفردات الأكبر من Q_2 .

الرُّبيّعات تقسم البياناتِ المرتبة تصاعدياً إلى أربعة أقسام متساوية تقريباً.

تدريب

أوجد الرُّبيّعات الثلاث لكلّ بيان ممايلي:

1. 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6
2. 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14
3. 23, 24, 24, 25, 25, 25, 27, 27, 28, 28, 28, 29, 30, 31

ثانياً: مخطط الصندوق والساعدين

مثال محلول 1

يدلّ البيان الإحصائيّ الآتي على علامات التّلميذات في مادة الرّياضيّات في شعبة للصف التاسع الأساسيّ:

18 22 25 33 36 38 41 42 47 48 49 55 55 57 60

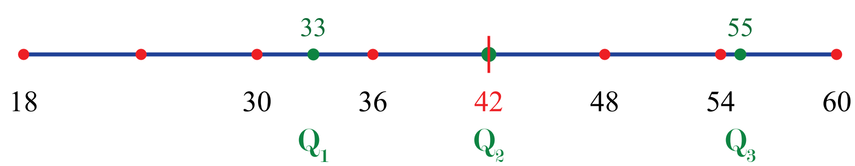
أوجد كلاً من: أكبر مفردة، أصغر مفردة، الرُّبيِّع الأول، الرُّبيِّع الثالث ثُمَّ مثِّلها على خط الأعداد.

الحلّ

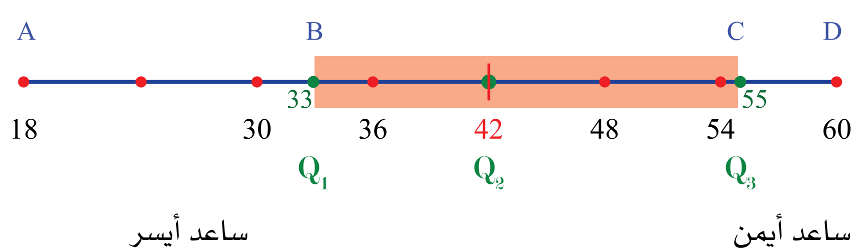
العلامات مرتّبة تصاعدياً:

18 22 25 33 36 38 41 42 47 48 49 55 55 57 60

أكبر مفردة: 60، أصغر مفردة: 18، الوسيط: 42، الرُّبيِّع الأول: 33، الرُّبيِّع الثالث: 55، عددُ المفردات 15 (فردي)



نرسمُ على خطّ الأعداد مستطيلاً بين الرُبيّعين الأول والثالث كما في الشّكل الآتي:



نُسمّي الشّكل الناتج مُخطّط الصّندوق والسّاعدين لهذا البيان.

و $\overline{AB}$ الساعد الأيسر و AB المدى الأدنى

و $\overline{CD}$ الساعد الأيمن و CD المدى الأعلى

والمستطيل الملوّن: الصّندوق.

وطول الصّندوق: $BC = Q_3 - Q_1$ (المدى الرُّبيِّعي)

تعلّم

لإنشاء مخطّط الصندوق والساعدين نحتاج إلى خمس مفردات هي:

أصغر مفردة، أكبر مفردة، الوسيط، الرُّبيِّع الأدنى، الرُّبيّع الأعلى

مثال محلول 2

يدلّ البيان الإحصائي الآتي على عدد حالات الإسعاف في إحدى المستشفيات خلال (12 ساعة) عمل متتالية:

3, 5, 4, 4, 7, 5, 5, 8, 5, 8, 7, 3

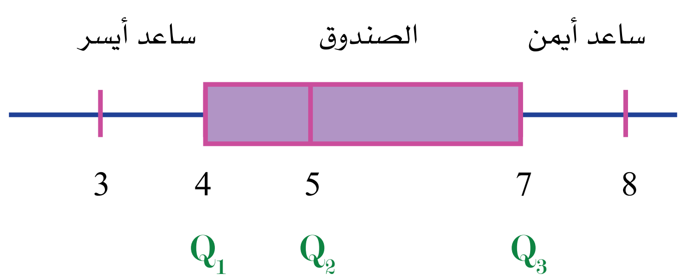
إذا أردنا إنشاء مخطط الصندوق والساعدين علينا إيجاد كلّ من الرُّبيِّعيات الثلاث نرتب البيان تصاعدياً:

3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8

عدد المفردات: ....، الوسيط (الرُّبيِّع الثاني) = ...

الرُّبيِّع الأول = ...، الرُّبيِّع الثالث = ...

مخطط الصندوق والساعدين



تدريب

تدلّ البيانات الآتية على علامات التلاميذ الأوائل في الأولمبياد العلمي للصف العاشر في إحدى المحافظات:

91, 86, 89, 88, 89, 85, 88

أ. ارسم تمثيلاً نقطياً لهذه البيانات (التمثيل البياني بالنقاط المجمّعة).

ب. أوجد كلاً من: الوسيط، المتوسّط الحسابي، المنوال، المدى.

ج. أنشئ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين.

تذكّر

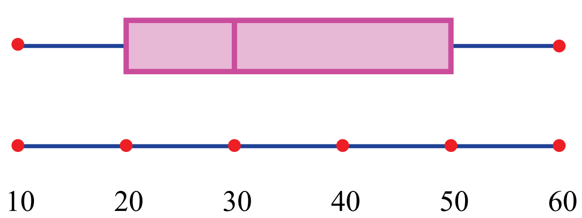
المدى لبيان إحصائي: هوالفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة في البيان الإحصائي

أنواع المدى في مخطط الصندوق والساعدين

1. **المدى الرُّبيِّعي:** وهو الفرق بين الرُّبيِّع الثالث والرُّبيِّع الأول.
2. **المدى الأدنى:** وهو الفرق بين الرُّبيِّع الأول وأصغر مفردة.
3. **المدى الأعلى:** وهو الفرق بين أكبر مفردة والرُّبيِّع الثالث.

مثال محلول

يدلُّ مُخطّط الصّندوق والسّاعدين على أسعار أجهزة حاسوب (مقدّرة بآلاف الليرات السورية).



أ. ما المدى الأدنى للأسعار؟

ب. ما المدى الأعلى للأسعار؟

ج. ما المدى الرُّبيِّعي للبيانات؟

الحل

من المخطط نستنتج أن:

$Q_3 = 50$, $Q_2 = 30$, $Q_1 = 20$، أصغر مفردة = 10، أكبر مفردة = 60

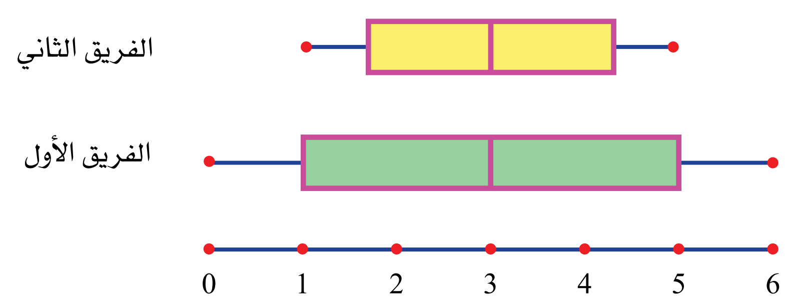
أ. المدى الأدنى للأسعار: $20 - 10 = 10$

ب. المدى الأعلى للأسعار: $60 - 50 = 10$

ج. المدى الرُّبيِّعي للأسعار: $50 - 20 = 30$

تدريب 1

في بطولة كأس العالم لكرة القدم، كانت نتيجة الأهداف لفريقين من الفرق المتنافسة والمُخطّط الآتي:

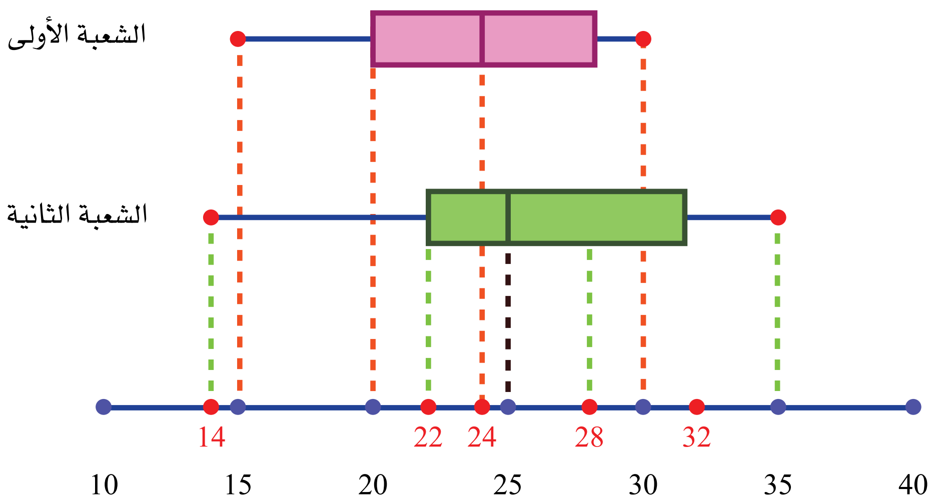


ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصّحيحة وإشارة (X) أمام العبارة غير الصحيحة في كلّ ممّا يأتي:

1. للفريقين الوسيط ذاته ....
2. المدى الأدنى لبيانات الفريقين ذاته ....
3. المدى الأعلى لبيانات الفريقين ذاته ....
4. المدى الرُّبيِّعي للفريقين ذاته ....
5. المدى للفريقين ذاته ....

تدريب 2

يدلّ مُخطّط الصندوق والساعدين الآتي على توزيع درجات شعبتين في مادة العلوم (الدرجة من 40).



1 مدى درجات الشّعبة الأولى يساوي:	A) 8	B) 10	C) 15	D) 21
2 مدى درجات الشّعبة الثانية يساوي:	A) 8	B) 10	C) 15	D) 21
3 المدى الرُّبيّعي لدرجات الشّعبة الأولى يساوي:	A) 8	B) 10	C) 15	D) 21
4 المدى الربيّعي لدرجات الشّعبة الثانية يساوي:	A) 8	B) 10	C) 15	D) 21
5 الرُّبيّع الأدنى لدرجات الشّعبة الأولى يساوي:	A) 20	B) 22	C) 28	D) 32
6 الرُّبيّع الأعلى لدرجات الشّعبة الأولى يساوي:	A) 20	B) 22	C) 28	D) 32
7 الرُّبيّع الأدنى لدرجات الشّعبة الثانية يساوي:	A) 20	B) 22	C) 28	D) 32
8 الرُّبيّع الأعلى لدرجات الشّعبة الثانية يساوي:	A) 20	B) 22	C) 28	D) 32

الدرس الثالث

التمثيل البياني بالأعمدة والقطاعات الدائرية

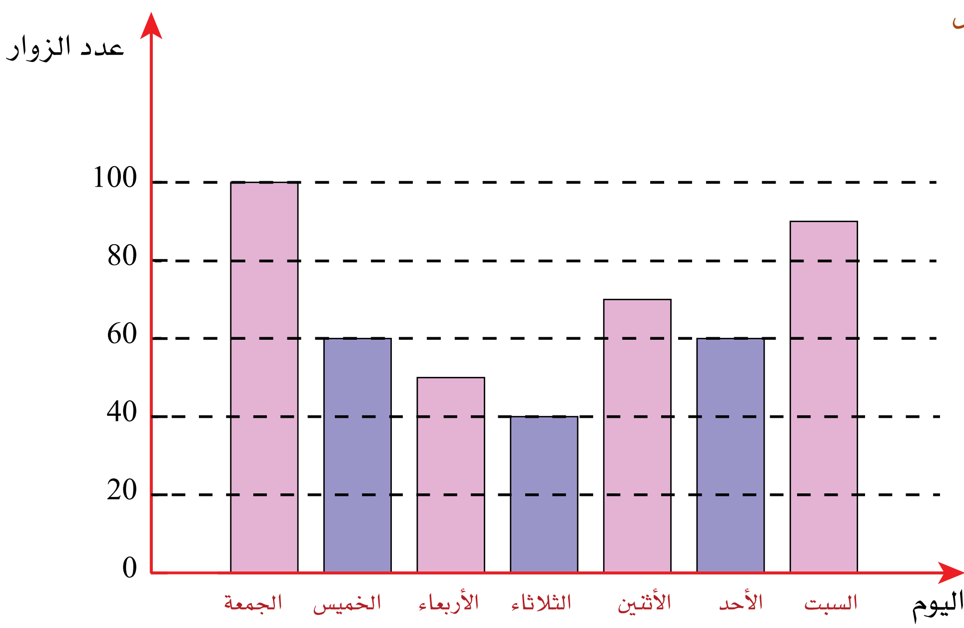
عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. استخدام التمثيل البياني بالأعمدة
2. استخدام التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية

أولاً: استخدام التمثيل البياني بالأعمدة

تذكّر: التمثيل البياني بالأعمدة يستخدم لتوضيح المقارنة

مثال محلول



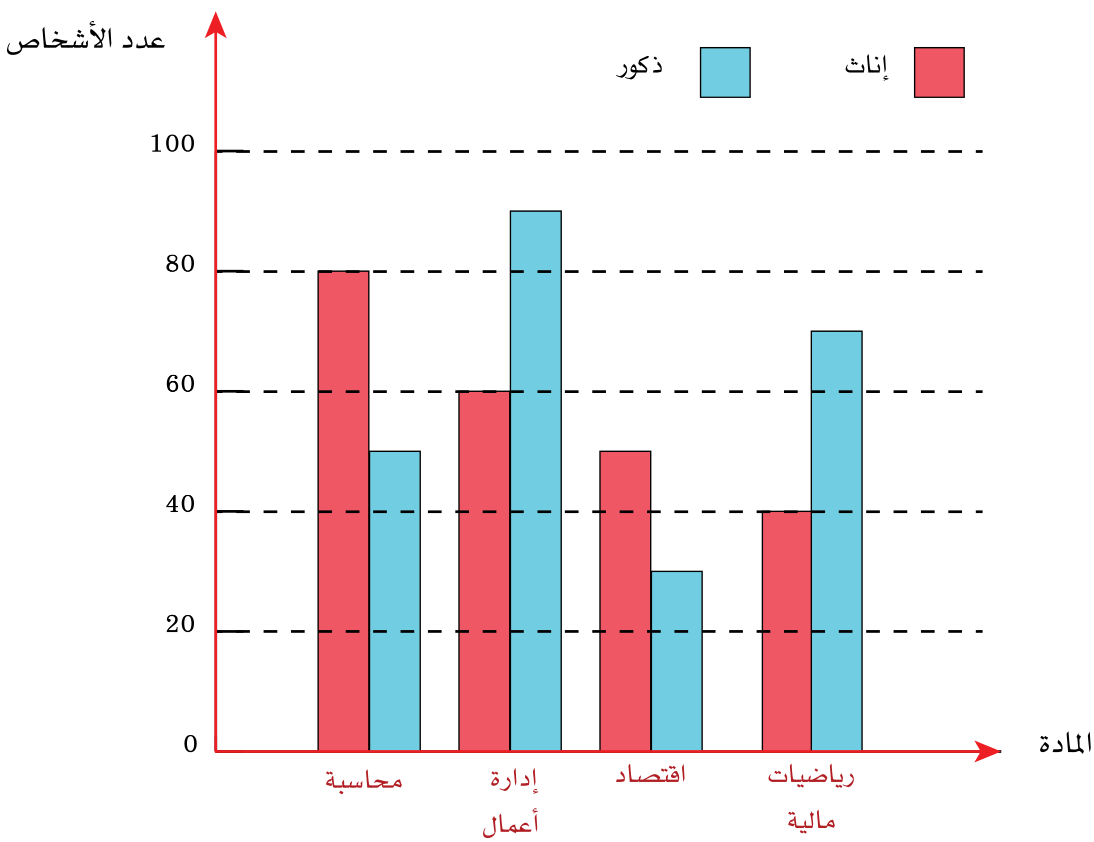
يدلّ الشكل الآتي على عدد زوار المركز الثقافي في أحد الأسابيع، أجب عمّا يأتي:

1. أيّ الأيام التي يتساوى فيها أعداد زوار المركز؟
2. في أيّ يوم بلغ عدد الزوار 70 زائراً؟
3. أيّ أيام هذا الأسبوع كان أكثر ازدحاماً بالزوار؟
4. كم زائراً زارَ المركز الثقافي يومي الجمعة والسبت؟

الحلّ

1. الأيام التي يتساوى فيها أعداد الزوار: يومي الأحد والخميس
2. اليوم الذي بلغ فيه عدد الزوار 70 زائراً هو يوم الاثنين
3. اليوم الأكثر ازدحاماً هو يوم الجمعة
4. يوم الجمعة 100 زائر ويوم السبت 90 زائراً

تدريب



يدلّ الشكل الآتي على أعداد الدارسين في كلية الاقتصاد مُوزّعين حسب الاختصاص:

1. في أيّ اختصاص يتساوى عدد الذكور مع عدد الإناث من اختصاص آخر؟
2. ما الاختصاصُ الذي سَجُّل فيه أكبرُ عدد من الذكور؟
3. ما عدد الذكور المسجّلين في هذا الفرع؟
4. ما عدد الإناث المسجلات في هذا الفرع؟

ثانياً: استخدام التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية

تذكّر

في جدول إحصائي يضم النوع، وتكراره يعبر عن كل نوع بقطاع دائري قياس زاويته:

$$x^\circ = \frac{\text{التكرار}}{\text{العدد الكلي}} \times 360^\circ$$

مثال محلول

يدلّ الجدول الآتي على الرياضة المفضلة لتلاميذ إحدى المدارس، مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدّائريّة.

نوع الرياضة	ألعاب القوى	كرة الطائرة	كرة السلة	كرة القدم
عدد التلاميذ	15	30	25	50

الحل

عدد التلاميذ (العدد الكلّي) هو $50 + 25 + 30 + 15 = 120$

- قياس الزاوية المخصصة لكرة القدم:

$$x^\circ = \frac{50}{120} \times 360 = 150^\circ$$

- قياس الزاوية المخصصة لكرة السلة

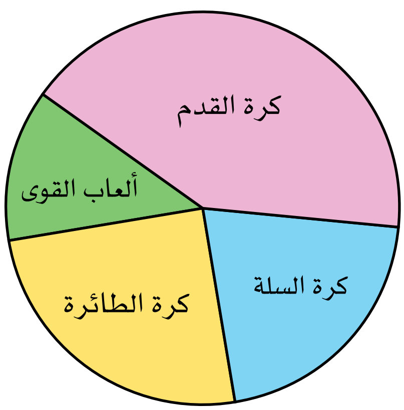
$$x^\circ = \frac{25}{120} \times 360 = 75^\circ$$

- قياس الزاوية المخصصة لكرة الطائرة:

$$x^\circ = \frac{30}{120} \times 360 = 90^\circ$$

- قياس الزاوية المخصصة لألعاب القوى:

$$x^\circ = \frac{15}{120} \times 360 = 45^\circ$$



لاحظ أنّ التمثيل بالقطاعات الدّائريّة يُستخدم لمقارنة الأجزاء بالكلّ.

ملاحظة

يمكن حساب قياس زاوية القطاع المقابل للمفردة 50 (مثلاً) بالعلاقة: $\frac{x}{360} = \frac{50}{120}$

تدريب

يدلّ الجدول الآتي على عدد الكتب المستعارة من مكتبة المدرسة في أسبوع:

الأيام	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
عدد الكتب	20	40	60	40	20

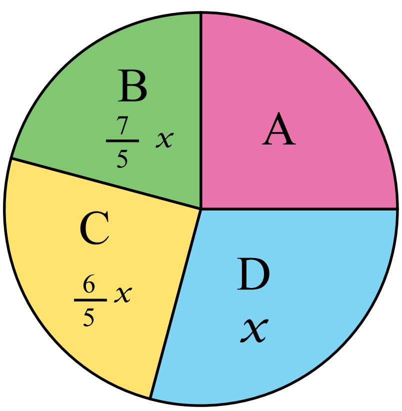
- مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.
- كيف نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية؟

مثال محلول

تأمّل الرّسم بالقطاعات الدائرية، الذي يدلّ على عدد الطبيبات في أربع مستشفيات A, B, C, D

1. ما مجموع قياسات الزوايا المثلة لعدد الطبيبات بدلالة x ؟
2. ما قياسات الزوايا المثلة للقطاعات الأربعة؟
3. ماهو عدد الطبيبات في المستشفى A إذا علمت أنّ العدد الكلي لهن 120 طبيبة؟

الحل



1. مجموع الزوايا الثلاث = D + C + B

$$= \frac{7}{5}x + \frac{6}{5}x + x$$

$$= (\frac{7}{5} + \frac{6}{5} + 1)x$$

$$= (\frac{7+6+5}{5})x = \frac{18}{5}x$$

2. قياسات الزوايا المثلة للقطاعات الأربعة؟

مجموع الزوايا الأربع = $A + B + C + D = 360^\circ$

$$90^\circ + \frac{18}{5}x = 360^\circ$$

$$\frac{18}{5}x = 360 - 90 = 270$$

$$18\ x = 5 \times 270 = 1350$$

$x = 75^{\circ}$ وبالتالي يكون:

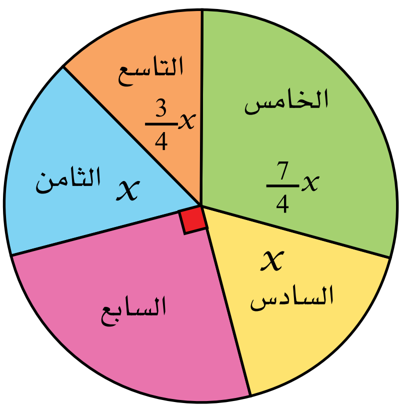
- قياس الزاوية D: 75°
- قياس الزاوية B: $\frac{7}{5} \times 75 = 105^{\circ}$
- قياس الزاوية C: $\frac{6}{5} \times 75 = 90^{\circ}$

3 عدد الطبيبات يمثل التكرار ومنه: التكرار $= \frac{\text{قياس الزاوية} \times \text{العدد الكلي}}{360}$

عدد الطبيبات في المستشفى A: $\frac{120 \times 90}{360} = 30$ طبيبة

نشاط 2

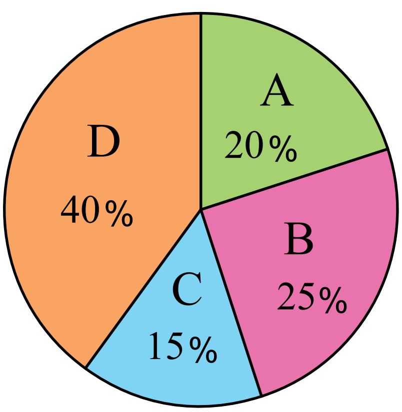
تأمّل الرّسم في القطاعات الدّائريّة، الذي يدلّ على عدد التلاميذ المسجلين في إحدى مدارس الحلقة الثانية من التعليم الأساسيّ (من الصّف الخامس حتى الصّف التّاسع)، ثُمّ أجب عن الأسئلة الآتية:



1 ما مجموع قياسات الزوايا المُمثّلة للصفوف الأربعة بدلالة x (مقدّرة بالدرجات)؟

2 ما قياسات الزوايا الممثلة للقطاعات الخمسة؟

3 إذا كان مجموع عدد التلاميذ مساوياً 240 تلميذاً، فأوجد عدد التّلاميذ في كلّ صف.



حاول أن تحلّ

يدلّ الشكل المجاور على عدد القراء لأربع صحف محليّة A, B, C, D.

فإذا كان عدد قراء الصحف الأربع هو 20 ألفاً، فأوجد عدد قرّاء كلّ صحيفة.

إرشاد للحل

لحساب النسبة 20% من العدد 20 ألفاً: نكتب:

عدد قراء الصحيفة $A = \frac{20}{100} \times 20000 = 4000$

أمثلة محلولة

قَدّم طارق n اختباراً فكان مُعدله 49، ثُمَّ قدم اختباراً ثانياً كانت نتيجته 57 فأصبح مُعدّله الجديد 51، أوجد n.

الحل

مجموع علامات طارق في n اختباراً يساوي $49n$

مجموع علامات طارق في $n + 1$ اختباراً يساوي $49n + 57$

ومنه: $\frac{49n+57}{n+1} = 51$ أي: $49n + 57 = 51n + 51$ ومنه $57 - 51 = 51n - 49n$

وبالتالي: $2n = 6$، إذاً: $n = 3$.

يدلُّ البيان الإحصائي الآتي، على عدد حالات الإسعاف في إحدى المستشفيات خلال 24 ساعة عمل متتالية:

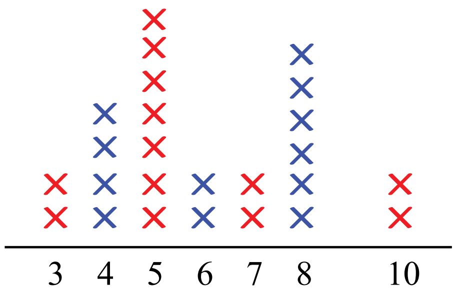
3	5	4	4	7	5	5	5	6	3	8	8
8	5	8	8	5	4	6	4	8	5	10	10

1. مثِّل هذه البيانات بالنقاط المجمعة واستخدمه في حساب:

   المدى، المنوال، الوسيط، المتوسِّط الحسابي لعدد حالات الإسعاف.

2. ارسم مُخطّط الصّندوق والسّاعدين.

الحل



1 تمثيل البيانات بالنقاط المجمعة:

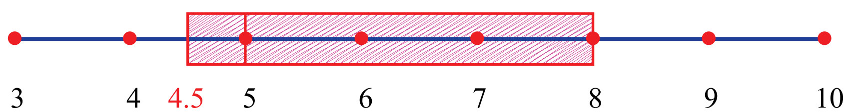
المدى $R = 10 - 3 = 7$.

المنوال $M = 5$.

الوسيط $x = 5$.

$$x = \frac{3(2)+4(4)+5(7)+6(2)+7+8(6)+10(2)}{24} = \frac{144}{24} = 6$$

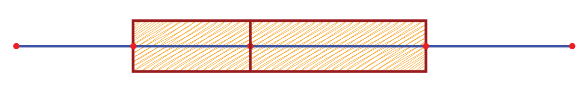
2 أصغر مفردة هي: 3، أكبر مفردة هي: 10، الوسيط هو: 5، الرُّبيّع الأوّل هو: $4.5 = \frac{4+5}{2}$ ، الرُّبيّع الثّالث هو: 8



اختبار وحدة تحليل البيانات الإحصائية

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصّحيحة فيما يأتي (واحدة صحيحة):

أ. في المخطط الآتي: أوزان مجموعة من الأطفال مُقدّرة بالكيلوغرام، واحد ممّا يأتي لا يمكن إيجاده:



1 المدى الرُّبيِّعي.

2 عدد الأطفال في هذا البيان.

3 الوسيط.

4 أكبر وزن في هذا البيان.

ب. يدلّ الجدول الآتي على عدد القُرّاء لأربع صحف محليّة A, B, C, D .

الصّحيفة	A	B	C	D
عدد القُرّاء بالآلآف	10	20	25	5

إذا مُثلت هذه البيانات بالقطاعات الدائرية فإنّ قياس الزاوية المخصصة للصحيفة B هو:

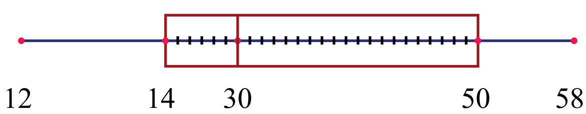
① 30° ② 120° ③ 60° ④ 150°

ج. لدينا البيان الإحصائي الآتي: x ، y, 25, 40 (أعداد طبيعية مرتبة تصاعدياً)

فإذا كان الوسيط = المنوال = المتوسط الحسابي، فإنّ:

① $x = y = 25$ ② $x = y = 10$ ③ $x = 25,\ y = 10$ ④ $x = 10,\ y = 25$

السؤال الثاني: يدلّ المخطط الآتي على علامات إحدى شُعب الصف التاسع الأساسيّ في مادة الرياضيات (الدّرجة 60)



اختر من المجموعة B الإجابة الصحيحة الموافقة لها من المجموعة A:

A
1. أعلى علامة في الشعبة هي:
2. 50% من الطلاب علاماتهم أقلّ من:
3. مدى أدنى 25% من البيانات يساوي:
4. الرُّبيِّع الثالث يساوي:

B
a. 60
b. 58
c. 50
d. 30
e. 26
f. 12

الدرس الأول

الأعداد الأوليّة

عزيزي الطالب/عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. الأعداد الأوليّة
2. ايجاد العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

أولاً: الأعداد الأوليّة

تذكّر

قابلية القسمة:

- **يقبل عدد القسمة على 2:** إذا كان رقم آحاده زوجياً.
- **يقبل عدد القسمة على 3:** إذا كان مجموع أرقامه من مضاعفات العدد 3 .
- **يقبل عدد القسمة على 5:** إذا كان آحاده 5 أو 0 .

أمثلة

- العدد 212 يقبل القسمة على العدد 2
- العدد 100 يقبل القسمة على العدد 2 والعدد 5
- العدد 312 يقبل القسمة على 2 و3

تطبيق

املأ الجدول بوضع إشارة (✓) في المكان المناسب:

العدد	قابلية القسمة على 2	قابلية القسمة على 3	قابلية القسمة على 5
120	✓	✓	✓
64			
180			
173			
105			

تدريب

أصغر عدد يقبل القسمة على 2 و 3 و 5 بآن واحد هو......... .

تذكّر

حول القاسم والمضاعف:

نشاط

$24 = 3 \times 8$ العدد 24 مضاعف للعددين: 3 و 8

$24 = 4 \times 6$ العدد 24 مضاعف للعددين: 4 و......

$24 = 2 \times 12$ العدد ...... مضاعف للعددين: ...... و......

$24 = 1 \times 24$ العدد ....: ....

بعبارة أخرى نكتب: العدد 3 قاسم للعدد 24

والعدد 8 قاسم للعدد 24 وهكذا ...

فتكون قواسم العدد 24 هي: { .... }

تطبيق

- اكتب قواسم العدد 12: {.....................}
- اكتب قواسم العدد 8: {.....................}

بصورة عامة: إذا كان العدد A يقبل القسمة على العدد B بدون باق: فإنّ A مضاعف لـ B، كما أنّ B قاسم لـ A.

ملاحظة

- كلمة عامل تكافئ كلمة قاسم
- أعد قراءة ما سبق باستخدام كلمة عامل .

تعريف العدد الأولي: هو كل عدد طبيعي أكبر من 1 وله عاملان مختلفان 1 والعدد ذاته.

أمثلة على أعداد أوليّة

2 ,3 ,5 ,7 ,11 ,13 ,17 ,19 ,23 ,29 ,31 ,37 ,41 ,43 ,47 ,53 ,59 ,61 ,67 ,71 ,73
,79 ,83 ,89 ,97 , ...

سؤال وجواب

- **هل العدد 86 أولي؟** كلا، لأنّه يقبل القسمة على العدد 2 بدون باق.
- **هل العدد 21 أولي؟** كلا، لأنّه يقبل القسمة على العدد 3 بدون باق.
- **هل العدد 143 أولي؟** العدد 143 لا يقبل القسمة على الأعداد 7, 5, 3, 2 لكنّه يقبل القسمة على 11 بدون باق فهو غير أولي.

تعلّم

مبرهنة: كلّ عدد طبيعي x غير أولي وأكبر من 1 يقبل على الأقل عاملاً أولياً y يحقق $y^2 \leq x$.

نتيجة: إذا كان x عدداً طبيعياً أكبر من 1 وكان x لايقبل أيّ عامل أولي y يحقق $y^2 \leq x$ فإنّ x أولي.

مثال محلول 1

هل العدد 173 عدد أوليّ أم لا؟

يلزم اختبار قابلية القسمة العدد 173 على الأعداد الأوليّة التي مربعاتها أصغر منه أوتساويه

لذا نقسم العدد 173 على الأعداد الأوليّة التي مربعاتها أصغر منه أوتساويه وهي: 13, 11, 7, 5, 3, 2

ملاحظة: لا نختبر العدد 17 لأنّ: $17^2 > 173$

نستنتج أنّ: العدد 173 عدد أوليّ لأنّه لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأوليّة

مثال محلول 2

هل العدد 323 أوليّ؟ ولماذا؟

نقسم العدد 323 على الأعداد التي مربعاتها أصغر منه أوتساويه، وهي: 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2

لا نختبر قابلية قسمة العدد 323 على العدد 19 لأنّ: $19^2 > 323$

نجد أنّ: العدد 323 يقبل القسمة على 17 دون باق أي أنّ العدد 323 ليس أوليّاً.

حاول أن تحل

بيّن فيما إذا كان كلّ من الأعداد الآتية أولياً أم غير أوليّ:

283, 259, 713, 919, 815

ثانياً: إيجاد العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

العامل المشترك الأكبر

1. طريقة عامة:

لإيجاد عامل مشترك أكبر لعددين أوأكثر:

نحلّل ثم نكتب كلّ عدد بدلالة عوامله الأوليّة فيكون ع.م.أ هو: جداء العوامل المشتركة بأصغر أس.

مثال 1

$24 = 2^3 \times 3$ $\qquad$ $36 = 2^2 \times 3$

ع.م.أ. $(24, 36) = 2^2 \times 3 = 12$

مثال 2

$x = 3^2 \times 5 \times 7$ $\qquad$ $y = 3 \times 5^2 \times 11$

العامل المشترك الأكبر للعددين x و y هو: $3 \times 5 = 15$

تدريب

أوجد بالطريقة العامة العامل المشترك الأعلى للعددين (204 ,792) (**ستجده** 12)

2. طريقة إقليدس:

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين:

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين 204 ,792

أ. نقسّم العدد الكبير 792 على العدد الصغير 204 فيكون باقي القسمة 180

ب. نقسّم المقسوم عليه 204 على باقي القسمة 180 فيكون باقي القسمة 24

ج. نكرّر هذا العمل حتى نحصل على قسمة يكون الباقي صفراً

آخر باق غير معدوم هو العامل المشترك الأكبر

مثال محلول 1

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين 252, 360 بطريقة إقليدس ننشئ الجدول التالي:

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
108	252	360
36	108	252
0	36	108

آخر باق غير معدوم هو العامل المشترك الأكبر

للعددين 252, 360 هو 36.

مثال محلول 2

وهو مثال محلول من الكتاب ص24.

لإيجاد العامل المشترك الأكبر للعددين 792, 204 بطريقة إقليدس ننشئ الجدول التالي:

الباقي	المقسوم عليه	المقسوم
180	204	792
24	180	204
12	24	180
0	12	24

آخر باق غير معدوم هو العامل المشترك الأكبر للعددين 792, 204 هو 12.

تدريب

1. أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين 450, 285 بطريقة إقليدس. (**تحقق أنّ الحلّ هو** 15)
2. أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين 160, 1024 بطريقة إقليدس.
3. أوجد العامل المشترك الأكبر للعددين 105, 245 بطريقة إقليدس.

حاول أن تحلّ

يحوي إبريق $840\ cm^3$ من شراب الليمون ويحوي آخر $1050\ cm^3$ من شراب البرتقال نُريدُ إفراغ كلّ منهما في أكواب متساوية السعة:

أ. ما أكبرُ سعة للكوب الواحد؟

ب. ما عددُ الأكواب التي يملؤها شراب اللّيمون؟

ج. ما عددُ الأكواب التي يملؤها شراب البرتقال؟

المضاعف المشترك الأصغر لعددين م.م.أ

تذكّر

1. العددان الأوليّان فيما بينهما هما عددان العامل المشترك الأكبر لهما هو 1 .

2. المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين فيما بينهما هو حاصل ضربهما.

أمثلة

العددان 5, 3 أوليّان فيما بينهما ومنه: م.م.أ $(5, 3)$ هو 15.

العددان 12, 7 أوليّان فيما بينهما ومنه: م.م.أ $(12, 7)$ هو 84.

العددان 15, 8 أوليّان فيما بينهما ومنه: م.م.أ $(15, 8)$ هو 120.

تذكّر

المضاعف المشترك الأصغر لعددين (م.م.أ): هو جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس.

مثال محلول 1

أوجد م.م.أ للعددين 36, 24

$24 = 2^3 \times 3$ $\qquad$ $36 = 2^2 \times 3^2$

م.م.أ هو $2^3 \times 3^2$ ويساوي 72

مثال محلول 2

أوجد م.م.أ للعددين

$10 = 2 \times 5$ $\qquad$ $12 = 2^2 \times 3$

م.م.أ هو $2^2 \times 3 \times 5$ ويساوي 65

نشاط 1

استكشف العلاقة بين ع.م.أ مع م.م.أ. لعددين

أ. أوجد كلاً من ع.م.أ، و م.م.أ. للعددين 84, 30.

ب. أوجد ناتج ع.م.أ × م.م.أ. = $6 \times 420 =$

ج. أوجد $24 \times 36 =$

ماذا تلاحظ؟

نشاط 2

- أوجد م.م.أ (110, 238) ثم ع.م.أ (110, 238)، ثم جداء الناتجين
- قارن الناتج السابق مع جداء العددين 238×110 .

تعلّم

جداء عددين يساوي جداء العامل المشترك الأكبر لهما بالمضاعف المشترك الأصغر لهما .

مثال محلول

أوجد العددين الطبيعيين $4x,\ 6x$ علماً أنّ: (ع.م.أ) لهما يساوي 12 و(م.م.أ) لهما يساوي 72.

الحلّ

نعلم أنّ: ع.م.أ للعددين x م.م.أ لهما يساوي حاصل ضرب هذين العددين.

$$4x \times 6x = 12 \times 72$$

$$24x^2 = 12 \times 72$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6$$

فيكون العددُ الأوّلُ، $4\ x = 6 \times 4 = 24$، ويكون العددُ الثاني $6x = 6 \times 6 = 36$

تدّرب

أوجد العددين $2x, 3x$ علماً أن ع.م.أ لهما يساوي 15 و م.م.أ لهما يساوي 10.

توظيف م.م.أ. لعدّة أعداد في حلّ المسائل

مثال محلول

إذا كانت الأعداد: 26 ,33 ,40 بواقي قسمة العدد x على كلّ من الأعداد 28, 35, 42 على الترتيب. أوجد أصغر قيمة للعدد x.

الحل: م.م.أ للأعداد يقبل القسمة دون باقٍ.

بما أنّ بواقي القسمة على الترتيب أصغر من المقسوم عليه بمقدار 2، نضيف هذا المقدار إلى العدد x فنحصل على القسمة بدون باقٍ.

أي أنّ: $x+2$ يقبل القسمة على الرقم 28 دون باقٍ

$x+2$ يقبل القسمة على الرقم 35 دون باقٍ

$x+2$ يقبل القسمة على الرقم 42 دون باقٍ

ومنه: $x+2$ هو م.م.أ $(42, 35, 28)$

فيكون: $x+2$ هو $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

أي: $x+2=420$

أي: $x = 420 - 2 = 418$

حاول أن تحلّ

أوجد أصغر عدد طبيعي n يكون باقي قسمته على كلّ من الأعداد 19 ,21 ,35 هو 18.

الحلّ: العدد n هو م.م.أ للأعداد السابقة مضافاً إليه 18.

ثم أكمل الحلّ عزيزي الطالب:

الدرس الثاني

العمليّات على الأعداد النسبيّة

عزيزي الطالب/ عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. جمع وطرح الأعداد النسبية
2. ضرب وقسمة الأعداد النسبية

أولاً: جمع وطرح الأعداد النسبيّة

تذكّر

- العدد النسبي هوكل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$ حيث $b \in Z$ و $b \neq 0$
- نحصل على الصورة العشرية لعدد نسبي بقسمة بسطه على مقامه .

تذكّر

لجمع وطرح الكسور يلزم توحيد المقامات:

مثال 1

$$\underset{(4)}{\frac{-3}{5}} + \underset{(5)}{\frac{2}{4}} = \frac{-12+10}{20} = \frac{-2}{20} = \frac{-1}{10}$$

مثال 2

$$\frac{-7}{10} - \frac{-2}{5} = \frac{-7}{10} + \underset{(2)}{\frac{2}{5}} = \frac{-7+4}{20} = \frac{-3}{20}$$

مثال محلول 1

$$\frac{50}{75}-\frac{15}{90}=$$

نختصر كلّ كسر على حدة (أي نكتبه بأبسط صورة)، حيث نحلّل كلاً من البسط والمقام ثم نحذف العوامل المشتركة بأصغر أس

$$\frac{50}{75}=\frac{2\times5^2}{3\times5^2}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{15}{90}=\frac{3\times5}{2\times5\times3^2}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{50}{75}-\frac{15}{90}=\underset{(2)}{\frac{2}{3}}-\underset{(1)}{\frac{1}{6}}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$$

مثال محلول 2

$$1-\left(\frac{50}{75}-\frac{15}{90}\right)=\underset{(6)}{\frac{1}{1}}-\underset{(2)}{\frac{2}{3}}+\underset{(1)}{\frac{1}{6}}=\frac{6}{6}-\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

تدريب

أوجد ناتج مايلي:

1. $\frac{3}{32}-\frac{5}{24}=$
2. $\frac{4}{7}-\frac{1}{14}=$
3. $\frac{-3}{7}-\frac{(-1)}{8}=$
4. $\frac{1}{63}-\frac{(-4)}{9}=$
5. $\frac{-3}{5}-\frac{2}{7}=$
6. $\frac{-12}{15}-\frac{-7}{25}=$

حاول أن تحلّ

أوجد ناتج كلّ مما يأتي:

1. $\frac{3}{8}+\frac{5}{4}-\frac{7}{6}=$
2. $\frac{63}{126}-\frac{47}{210}=$
3. $\left(3-\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

ثانياً: ضرب وقسمة الأعداد النسبيّة

تذكّر

1. **لضرب عدد صحيح بكسر:** نضرب العدد الصحيح ببسط الكسر على المقام نفسه.
2. **لضرب كسر بكسر:** نضرب البسط بالبسط والمقام بالمقام.

أمثلة

1. $-3\times\frac{5}{2}=\frac{-3\times5}{2}=\frac{-15}{2}$
2. $\frac{2}{9}\times\frac{-27}{5}=\frac{-2\times27}{9\times5}=\frac{-6}{5}$

3. **لقسمة كسر على كسر:** نضرب الكسر الأول بمقلوب الكسر الثاني.

أمثلة

1. $\frac{15}{10}\div\frac{2}{5}=\frac{15}{10}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$
2. $\dfrac{2-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{15}{5}+\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{16}{5}}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{16}=\frac{25}{96}$

تدريب **أوجد ناتج مايلي:**

1. $-5\times\frac{5}{24}=$
2. $\frac{-35}{6}\times\frac{(-1)}{7}=$
3. $\frac{-5}{11}\div\frac{2}{9}=$
4. $\frac{4}{15}\div\frac{(-8)}{25}=$
5. $\left(\frac{90}{10}-\frac{48}{16}\right)\div\frac{2}{5}=$
6. $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3+\frac{1}{4}}=$

تدريب **أوجد ناتج ما يلي:**

$$\dfrac{9-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{-5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}\times\dfrac{8-\frac{1}{5}-\frac{4}{10}}{1-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}}=$$

الدرس الثالث

الأعداد غير النسبيّة

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

- الأعداد غير النسبيّة

الأعداد غير النسبية

تذكّر

العدد النسبي هوكل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$ حيث $b \in Z$ و$b \neq 0$

نحصل على الصورة العشرية لعدد نسبي بقسمة بسطه على مقامه .

مقدمة

لكتابة كلّ عدد ممّا يلي بالصورة العشريّة:

$$\frac{2}{5}, \frac{103}{2}, \frac{8}{3}$$

الحل

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{2 \times 5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(نقسّم البسط على المقام) $\frac{103}{2} = 51.5$

(بقسمة البسط على المقام نجد القسمة غير منتهية ولكن دورية) $\frac{8}{3} = 2.6666.....$

الصورة العشريّة للعدد النسبي $\frac{8}{3}$ غير منتهية ودورية ودورها 6

تدريب

اكتب كلّ عدد بالصورة العشرية:

توجيه للحل

قسّم البسط على المقام.

$\frac{5}{4}$ $\frac{12}{50}$ $\frac{2}{11}$

تدريب

بيّن أنّ الصورة العشريّة للعدد النسبي $\frac{24}{11}$ غير منتهية ودوريّة، عيّن دورها.

نتائج:

نقبل أنّ مجموعةَ الأعدادِ النسبيّة تتألف من:

1. أعدادٍ نسبيّة لكلّ منها صورةٌ عشريّة مُنتهية.
2. أعدادٍ نسبيّة لكلّ منها صورةٌ عشريّة غير مُنتهية ودوريّة.

أمثلة على أعداد غير نسبيّة

- هناك عدد غير نسبي شائع الاستعمال هو العدد π.
- وإنّ الأعداد $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$,...... أعداد غير نسبية.

- تُرمِّز الأعداد غير النسبيّة $\mathbb{Q}'$ ونُسمّي $\mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$.

- يمكن عرض بعض الأمثلة للأعداد غير النسبيّة، باستعمال برنامج حاسوبي رياضي يمكن أن نوجد قيماً لأعداد بعد عدد من الفواصل العشريّة.

تدريب

بيّن أيّ من الأعداد التالية نسبي وأيّها غير نسبي:

$$-2\sqrt{5}\,,\quad \frac{-2}{5},\quad \sqrt{\frac{9}{36}},\quad \sqrt{300}\,,\quad \frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \frac{3\sqrt{4}}{5},\quad \sqrt{25-9}\,,\quad -\sqrt{7}\,,\quad 0.39$$

الدرس الأول

ترتيب الأعداد الحقيقية ومقارنتها

عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد.
2. ترتيب الأعداد الحقيقية ومقارنتها.

تذكّر

تعلّمت سابقاً........ مجموعات الأعداد:

1. مجموعة الأعداد الطبيعية: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$
2. مجموعة الأعداد الصحيحة: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$
3. مجموعة الأعداد النسبيّة $(\mathbb{Q})$

تعلّم

العدد النسبي: هو كل عدد يكتب بالشكل $\frac{a}{b}$

حيث a عدد صحيح، b عدد صحيح لا يساوي الصفر .

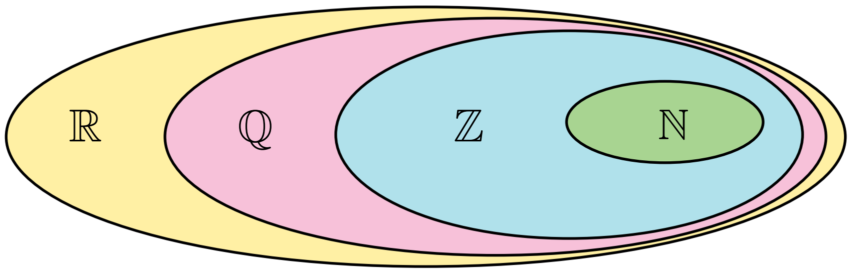
مثلاً: عدد نسبي $\frac{2}{3}, \quad -1.2 = \frac{-12}{10}, \quad 5 = \frac{5}{1}$

4. مجموعة الأعداد غير النسبيّة $(\mathbb{Q}')$

أمثلة:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \pi,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{2}{\sqrt{3}},\ \ldots\ldots$$

5. مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$ وتشمل جميع الأعداد النسبيّة وغير النسبيّة.



أولاً: تمثيل الأعداد الحقيقية على خط الأعداد

مثال

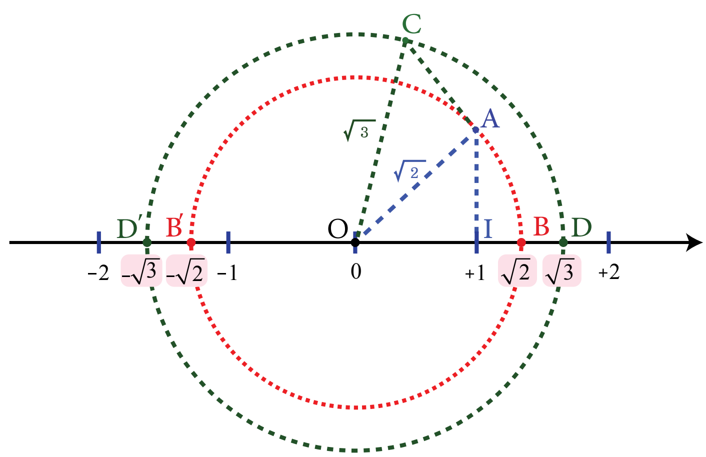
مثّل العددين $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ على خط الأعداد.

الحل

أ. ارسم خط الأعداد وعيّن عليه نقطة المبدأ O التي تمثل العدد 0 ثم عيّن عليه النقطة (I) التي تمثل العدد (1) واحد الأطوال

ب. ارسم من I عموداً على خط الأعداد وعيّن عليه النقطة A حيث $AI = 1$ فيكون حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $\overset{\triangle}{OIA}$: $OA = \sqrt{2}$

ج. ارسم الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $OA = \sqrt{2}$ فتقطع خط الأعداد في النقطتين B, B' فيكون $OB = OB' = \sqrt{2}$ وتكون: B تمثل العدد $+\sqrt{2}$ و B' تمثل العدد $-\sqrt{2}$.



ولتمثيل $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$: نرسم من A عموداً على OA ونعيّن عليه C حيث $AC = 1$ فيكون حسب فيثاغورث $OC = \sqrt{3}$.

نرسم الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها OA فتقطع خط الأعداد في نقطتين D', D فيكون $OD = OD' = \sqrt{3}$
ويكون: D تمثل العدد $+\sqrt{3}$ ، D' تمثل العدد $-\sqrt{3}$.

ويمكن المتابعة بنفس الطريقة لتمثيل الأعداد: ... $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$ .... $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, ...

تعلّم

كل عدد حقيقي يمثل النقطة على خط الأعداد وكل نقطة على خط الأعداد تمثل عدداً حقيقياً

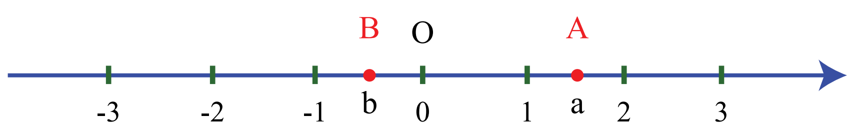
نسميه: فاصلة النقطة .

ثانياً: ترتيب الأعداد الحقيقية ومقارنتها

لترتيب عددين حقيقيين لدينا عدة طرائق منها:

1. تمثيل العددين على مستقيم الأعداد

مثال



إذا كانت النقطة A تمثل العدد a والنقطة B تمثل العدد b وإذا كانت النقطة A على يمين B

فإن: $b < a$ وبالعكس.

2. المقارنة المباشرة

أمثلة

أ. $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ (لأن: $2 < 3$)

ب. $\pi > 3$

ج. $1 > -\sqrt{3}$ العدد الموجب تماماً أكبر من العدد السالب تماماً

د. $-3 < 0$ الصفر أكبر من العدد السالب تماماً

هـ. $0 < 5$ العدد الموجب تماماً أكبر من الصفر

3. طريقة الطرح

لمقارنة عددين حقيقيين a, b: نحسب $(a-b)$ ونميّز الحالات:

أ) $a-b<0$ فإن $a>b$

ب) $a-b>0$ فإن $a<b$

جـ) $a-b=0$ فإن $a=b$

مثال

قارن بين العددين $\sqrt{2}$ ، $\frac{3}{\sqrt{2}}$

تذكر أنّ: $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$

الحل

$$\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\underset{(1)}{\frac{3}{\sqrt{2}}}-\underset{(\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{2}}{1}}=\frac{3\times1-\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3-2}{\sqrt{2}}=\frac{+1}{\sqrt{2}}>0$$

إذاً:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

تدريب

قارن بين العددين $\sqrt{5}$ ، $\frac{5}{\sqrt{5}}$

الحل

$$\frac{5}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}=\underset{(.......)}{\frac{5}{\sqrt{5}}}-\underset{(.......)}{\frac{\sqrt{5}}{1}}=\frac{........-........}{\sqrt{5}}=\frac{....-....}{\sqrt{5}}=\frac{0}{\sqrt{5}}=0$$

إذاً:

$$\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

حاول أن تحلّ

1. **قارن بين العددين:** $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ، $2\sqrt{3}$

2. **قارن بين العددين:** $\frac{6}{\sqrt{3}}$ ، $2\sqrt{3}$

4. طريقة التربيع

لمقارنة عددين موجبين a, b : يمكن مقارنة a^2, b^2 ونوضح ذلك بمثال.

مثال

تذكر

$(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$

قارن بين العددين: $2\sqrt{11}\ ,\ 3\sqrt{5}$

الحل

$$\left(2\sqrt{11}\right)^2 = (2)^2 \times \left(\sqrt{11}\right)^2 = 4 \times 11 = 44$$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (3)^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 \times 5 = 45$$

نلاحظ أن: $44 < 45$ **إذاً:** $2\sqrt{11} < 3\sqrt{5}$

تدرّب

قارن بين كلّ عددين فيما يلي:

1. $3\sqrt{5}$ ☐ -2
2. $2\sqrt{5}$ ☐ $5\sqrt{2}$
3. $\frac{6}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}$ ☐ 0
4. $\sqrt{19}$ ☐ $\sqrt{17}$
5. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{5}{\sqrt{5}}$
6. $3\sqrt{5}$ ☐ 15

الدرس الثاني

جمع الأعداد الحقيقية وطرحها

عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. جمع عددين حقيقيين أوأكثر.
2. خواص الجمع في $\mathbb{R}$.
3. طرح عددين حقيقيين أوأكثر.

تذكّر

تعلّمت سابقاً.........لا يمكن جمع أوطرح الجذور إلا إذا كانت متشابهة

أمثلة

1. **عندما يكون العددان من إشارة واحدة:** نضع الإشارة نفسها ثم نجمع

$$3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

$$-3\sqrt{5}-7\sqrt{5}=-10\sqrt{5}$$

2. **العددان من إشارتين مختلفتين:** نضع إشارة العدد الكبير ثم نطرح

$$-5\sqrt{7}+9\sqrt{7}=+4\sqrt{7}$$

$$5\sqrt{11}+2\sqrt{3}$$

(لا يمكن الجمع لأن: $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$ غير متشابهين)

$$5\sqrt{2}-1\sqrt{3}-3=5\sqrt{2}-\sqrt{3}-3$$

أولاً: جمع عددين حقيقيين أو أكثر

تذكر أنّ: $1\sqrt{2} = \sqrt{2}$

تدرّب

أوجد ناتج ما يلي:

1. $5\sqrt{6} + 2\sqrt{3} =$
2. $7\sqrt{3} - 9\sqrt{3} =$
3. $8\sqrt{2} + \sqrt{2} =$
4. $3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 2\sqrt{5} =$
5. $-3\sqrt{11} + 3\sqrt{2} - 5 - \sqrt{2} + 3\sqrt{11} + 6 =$

ثانياً: خواص الجمع في $\mathbb{R}$

1. الجمع تبديلي في $\mathbb{R}$ أي: $a + b = b + a$
2. الصفر عنصر حيادي بالنسبة إلى الجمع في $\mathbb{R}$ أي: $a + 0 = 0 + a = a$
3. النظير الجمعي: لكلّ عدد حقيقي (a) نظير هو $(-a)$ أي: $a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. الجمع تجميعي في $\mathbb{R}$ أي: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

تعلّم

النظير الجمعي (المعاكس): النظير الجمعي للعدد (a) هو $(-a)$

أو نقول معاكس العدد (a) هو $(-a)$

- النظير الجمعي للعدد $a + b$ هو: $-(a + b) = -a - b$
- النظير الجمعي للعدد $a + b - c$ هو: $-(a + b - c) = -a - b + c$

تدريب

أكمل الجدول:

العدد	$+3$	0	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$2-\sqrt{3}$	$+5\sqrt{2}$
نظيره الجمعي (معاكسه)		0				

ثالثاً: الطرح في $\mathbb{R}$

تعلّم

- إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن: $a - b = a + (-b)$
- أي لطرح عدد حقيقي من آخر نضيف للأول (a) النظير الجمعي للثاني (b).

مثال

1. **أوجد ناتج ما يلي:**

① $(3\sqrt{2})-(-2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(نظيره الجمعي $+2\sqrt{2}$)

② $(3\sqrt{2}-5\sqrt{7})-(+5\sqrt{2}-3\sqrt{7}) = 3\sqrt{2}-5\sqrt{7}-5\sqrt{2}+3\sqrt{7} = -2\sqrt{2}-2\sqrt{7}$

2. **إذا كان:** $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}\ ,\ b=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ **فأوجد ناتج** $b-a,\ a-b$

الحل

$a-b=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\text{.............}+\text{.............}=$

$b-a=(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\text{...........}+\text{...........}=$

لاحظ أنّ

$b - a$ هوالنظير الجمعي لـ $a - b$ أي: $-(a-b) = b - a$

تدريب

1. **أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:**

1. $(-\sqrt{13}+2)+\sqrt{13}-(2+\sqrt{13})$
2. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}+7)-(2\sqrt{5}+3-2\sqrt{3})$
3. $3-(\sqrt{2}-\pi+3)-(\pi-\sqrt{2})$

2. **إذا كان:** $a=2\pi+5\sqrt{3}-1\ ,\ b=3\pi-4\sqrt{3}+2$ **أوجد ناتج:** $a-b,\ -b+\pi$

3. **إذا كان:** $a+b=3.5$، **أوجد:** $5-a-b$

إرشاد للحل

$5-a-b=5-(a+b)=\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots=$

4. **إذا كان:** $a-b=\frac{3}{2}$ **أوجد:**

1. $b-a$
2. $3-b-(-a)$
3. $a-\left(\frac{7}{4}+b\right)$

تدريب

أوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة

1. $A=-\pi-(\sqrt{2}-\pi)+3$
2. $B=\frac{3}{4}-\left(-\sqrt{11}-\frac{1}{4}\right)-\sqrt{11}$

الدرس الثالث

القيمة المطلقة لعدد حقيقي

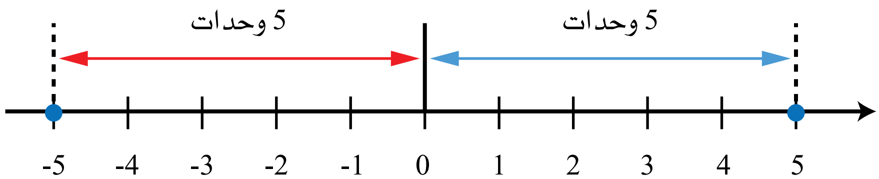
عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. القيمة المطلقة لعدد حقيقي.
2. حلّ معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

تذكّر

تعلّمت سابقاً ...

- القيمة المطلقة لعدد x هي المسافة بين النقطة التي يمثلها هذا العدد ومبدأ الإحداثيات.
- نرمز القيمة المطلقة للعدد x بالرمز $|x|$.
- أيّاً كان العدد x فإن: $|-x| = |x|$ و $|x| \geq 0$.



$|-5| = 5$ $\qquad$ $|5| = 5$

تعلّم

1. إذا كان x عدداً حقيقياً موجباً فإنّ: $|x| = x$

أي القيمة المطلقة للعدد الموجب هي العدد ذاته.

2. إذا كان x عدداً حقيقياً سالباً فإنّ: $|-x| = x$

أي القيمة المطلقة للعدد السالب هي نظيره الجمعي (معاكسه).

أولاً: القيمة المطلقة لعدد حقيقي

أمثلة

$\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |5| = 5, \quad \left|-\sqrt{3}\right| = +\sqrt{3}, \quad |0| = 0$

$\left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$ — القيمة المطلقة للعدد الموجب هي العدد ذاته.

موجب لأنّ: $3 > \sqrt{5}$

$\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ — القيمة المطلقة للعدد السالب هي نظيره الجمعي.

نربع نربع

$4 \times 3 = 12 < 9 \times 2 = 18$ ومنه: العدد داخل القيمة المطلقة سالب

تدريب

- **أوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة:**

1. $|7+|$
2. $\left|-\sqrt{3}\right|$
3. $\left|2\sqrt{3}+5\right|$
4. $\left|-2-\sqrt{3}\right|$
5. $\left|\sqrt{5}-2\right|$
6. $\left|3-\sqrt{11}\right|$
7. $\pi\,|-\pi-3|$
8. $\left||-2|-\sqrt{5}\right|-\sqrt{5}$

- **إذا كان** $y \le x$ **بسّط كلاً من** $A = |x-y-2| + |y-x|$, $B = |y-x+1| - |x-y|$

إرشاد للحل

1) بما أنّ $y \le x$ نستنتج: $x - y \le 0$ ومنه: $|x-y| = y - x$

2) $y - x \ge 0$ ومنه: $|y-x| = y - x$

ثانياً: حلّ معادلات تتضمن قيمة مطلقة

لدينا ثلاثة نماذج:

النموذج الأول

إذا كان $|x| = 0$ **: فإنّ** $x = 0$

مثال

أوجد حلّ المعادلة فيما يلي:

1. $|x - 3| = 0$

تعني $x - 3 = 0$ ومنه $x = 3$

2. $\left|x + \sqrt{5}\right| = 0$

تعني $x + \sqrt{5} = 0$ ومنه $x = -\sqrt{5}$

3. $|3x + 18| = 0$

تعني $3x + 18 = 0$ ومنه $3x = -18$ بالتالي $x = \dfrac{-18}{3} = -6$

تدريب

أوجد حلّ كل معادلة ممّا يأتي في $\mathbb{R}$:

1. $|x + 1| = 0$
2. $\left|x - 3\sqrt{2}\right| = 0$
3. $\left|-2x - 4\sqrt{5}\right| = 0$
4. $\left|x - \pi + \sqrt{2}\right| = 0$

النموذج الثاني

إذا كان: $|x| = a$ **حيث a عدد موجب فإنّ**

- **إمّا:** $x = a$ **أي: داخل القيمة المطلقة = الطرف الثاني**
- **أو:** $x = -a$ **أي داخل القيمة المطلقة = النظير الجمعي للطرف الثاني**

أمثلة

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|2x - 1| = 7$

الحلّ

إمّا $2x - 1 = 7$ ومنه: $2x = 7 + 1$ ومنه: $2x = 8$ ومنه: $x = \frac{8}{2} = 4$

أو $2x - 1 = -7$ ومنه: $2x = -7 + 1$ ومنه: $2x = -6$ ومنه: $x = \frac{-6}{2} = -3$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|x - \pi + 3| = \pi - 3$

الحلّ

إمّا: $x - \pi + 3 = \pi - 3$ ومنه $x = \pi - 3 + \pi - 3$ ومنه $x = 2\pi - 6$

أو: $x - \pi + 3 = -\pi + 3$ ومنه $x = -\pi + 3 + \pi - 3$ ومنه $x = 0$

تدريب

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات:

1. $\left|3x-\sqrt{5}+2\right|=\sqrt{5}+2$
2. $\left|x-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$
3. $\left|\pi-x+\sqrt{3}\right|=\pi-\sqrt{3}$
4. $|x-2|=5$
5. $|2\ x-3|=2$

النموذج الثالث

إذا كان (عدد سالب تماماً $= |\,x\,|$) فإنّ المعادلة مستحيلة الحل.

مثال

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $|\,x-2\,|=-3$

الحلّ

بما أنّ الطرف الأول قيمة مطلقة (وهي موجبة) والطرف الثاني سالب تماماً **فإنّ المعادلة مستحيلة الحل.**

الدرس الرابع

ضرب الأعداد الحقيقية

عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. الضرب في $\mathbb{R}$ وخواصه
2. إيجاد مقلوب عدد حقيقي غير معدوم
3. توزيع الضرب على الجمع في $\mathbb{R}$ (النشر)
4. العنصر الماص في $\mathbb{R}$
5. القيمة المطلقة لجداء عددين حقيقين
6. إيجاد الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب
7. تبسيط عبارات تحوي جذوراً تربيعية

أولاً: الضرب في $\mathbb{R}$ وخواصه

تذكّر

خواص الضرب في $\mathbb{R}$:

1. الضرب تبديلي في $\mathbb{R}$ أي: $a \times b = b \times a$
2. الضرب تجميعي في $\mathbb{R}$ أي: $a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3. العنصر الحيادي بالنسبة للضرب في $\mathbb{R}$ هو العدد (1) أي: $a \times 1 = 1 \times a = a$
4. العنصر الماص بالنسبة للضرب في $\mathbb{R}$ هو العدد (0) أي: $a \times 0 = 0 \times a = 0$
5. توزيع الضرب على الجمع والطرح: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

جداء عددين حقيقيين

تذكر (ضرب الإشارات)

$$\begin{pmatrix} + \times + = + \\ - \times - = + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + \times - = - \\ - \times + = - \end{pmatrix}$$

قاعدة

1) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

2) $x\sqrt{a} \times y\sqrt{b} = x \times y\sqrt{a \times b}$

أمثلة

أوجد ناتج ما يأتي:

1. $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$
2. $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{7} = 3 \times 2\sqrt{5 \times 7} = 6\sqrt{35}$
3. $5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
4. $3 \times 2\sqrt{11} = 6\sqrt{11}$

تدريب

1. أوجد ناتج ما يأتي:

1. $\sqrt{7} \times \sqrt{11} = \sqrt{\ldots\ldots}$
2. $5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = \ldots\ldots\sqrt{\ldots\ldots}$

2. أوجد ناتج:

1. $\sqrt{8} \times \sqrt{3} = \sqrt{\ldots\ldots}$
2. $2\sqrt{7} \times \sqrt{5} =$
3. $(-2\sqrt{3})(-3\sqrt{2}) =$
4. $(2\sqrt{11})(-5) =$
5. $-15\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} =$
6. $\sqrt{8} \times 2\sqrt{2} =$

ثانياً: إيجاد مقلوب عدد حقيقي غير معدوم

تذكّر

مقلوب العدد الحقيقي: $\frac{a}{b}$ هو $\frac{b}{a}$ بشرط: $(a \neq 0، b \neq 0)$

تدريب

أكمل الجدول:

العدد	$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{3}$	7	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	-2.5
مقلوبه	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{-5}$	$\frac{1}{7}$			

تعلّم

لبيان أنّ العدد (a') هو مقلوب العدد (a) نثبت أنّ: $a \times a' = 1$

مثال

1 **بيّن أنّ: العدد $\frac{5}{2}$ هو مقلوب العدد $\frac{1}{2.5}$**

الحل

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{2.5} = \frac{5 \times 1}{2 \times 2.5} = \frac{5}{5} = 1$$

إذاً $\frac{5}{2}$ هو مقلوب $\frac{1}{2.5}$

2 **هل العدد $-3\sqrt{2}$ هو مقلوب العدد $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ ؟**

الحلّ

$$\frac{-3}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{-3\sqrt{2}}{1}\right) = \frac{-3 \times (-3\sqrt{2})}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{+9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 9 \neq 1$$

إذاً: $-3\sqrt{2}$ ليس مقلوب $\frac{-3}{\sqrt{2}}$

ثالثاً: توزيع الضرب على الجمع في $\mathbb{R}$ (النشر)

قاعدة

1) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2) $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

مثال

انشر ما يلي:

1. $3 \times (2a + 5b) = 3\times 2a + 3\times 5b = 6a + 15b$
2. $\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \times 2 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$
3. $(x - 2)(x + 5) = x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$

تذكّر $x \times x = x^2$

أمثلة

1. $(\sqrt{3} + 7)(\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 2 + 7 \times \sqrt{3} + 7 \times 2 = 17 + 9\sqrt{3}$
2. $(x + \sqrt{5})(\sqrt{5} + x) = x \times \sqrt{5} + x \times x + \sqrt{5} \times \sqrt{5} + \sqrt{5} \times x = x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$
3. $(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 4) = \sqrt{7} \times \sqrt{7} + \sqrt{7} \times 4 - 3 \times \sqrt{7} - 3 \times 4 = -5 + \sqrt{7}$
4. $(x + \sqrt{2})(y - \frac{1}{\sqrt{2}}) = x \times (y - \frac{1}{\sqrt{2}}) + \sqrt{2} \times (y - \frac{1}{\sqrt{2}}) = xy - \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}y - 1$
5. $(3\sqrt{2} - 1)(5\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} \times (5\sqrt{2} - 3) - 1 \times (5\sqrt{2} - 3) = 33 - 14\sqrt{2}$
6. $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$
7. $(x + \frac{1}{4})(x - 8) = x(x - 8) + \frac{1}{4}(x - 8) = x^2 - \frac{31}{4}x - 2$
8. $(a - b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d) = ac - ad - bc - bd$

تدريب

انشر المقدار فيما يأتي:

1. $5\,(3a - 2b) =$
2. $-3\,(7x - 2y) =$
3. $\sqrt{2}(3\sqrt{2} - 5) =$
4. $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) =$
5. $(a + b)(a - b) =$
6. $(a + b)(a + b) =$
7. $(3\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} - 1) =$
8. $(x - \sqrt{3})(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) =$

تعلّم

التحليل: يقصد بالتحليل الانتقال من صيغة تحوي جمعاً أوطرحاً إلى صيغة تحوي جداءً (عكس النشر)

تنويه

حلّ كثير الحدود: تعني التحليل إلى أكبر عدد ممكن من العوامل

مثال

حلّ ما يلي:

1. $ax + ay = a(x + y)$

مشترك

2. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3 - 5)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

مشترك

3. $x^2 - 5x = x(x - 5)$
4. $\sqrt{5}(x - 2) + 2\sqrt{3}(x - 2) = (\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(x - 2)$

تدريب

حلّل ما يلي:

1. $3\sqrt{2}+3\sqrt{5}$
2. $bx-by=$
3. $3b-\pi b=$
4. $\sqrt{2}(x+1)+3(x+1)=$
5. $3x^2+x=$

رابعاً: العنصر الماص في $\mathbb{R}$

العنصر الماص في $\mathbb{R}$ هو الصفر لأنّ: $b\times 0=0\times b=0$

تعلّم

1. إذا كان: $x\,.\,y=0$ يعني: إمّا $x=0$ أو $y=0$
2. إذا كان: $a\,.\,x=0$ وكان $a\neq 0$ فإنّ $x=0$

مثال

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات:

1. $3x=0$ بما أنّ $3\neq 0$ فإنّ $x=0$
2. $7(x-1)=0$ بما أنّ $7\neq 0$ فإنّ $x-1=0$ وبالتالي $x=1$
3. $(x-\sqrt{2})(x+\pi)=0$ وتعني: إما $x-\sqrt{2}=0$ وبالتالي $x=\sqrt{2}$

أو $x+\pi=0$ ، وبالتالي $x=-\pi$

تدريب

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات:

1. $-2x=0$
2. $\pi\,(+x)=0$
3. $2\sqrt{5}(x-4+\pi)=0$
4. $(x-5)(\sqrt{3}-x)=0$
5. $x(2x+4\sqrt{2})=0$

خامساً: القيمة المطلقة لجداء عددين حقيقيين

تعلّم

1. $|a.b| = |a|.|b|$
2. $|a^2| = |a|^2 = a^2$

مثال

إذا كان: $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{3} - 2$ **فأوجد كلاً من:** $|a|, |b|$، **ثم استنتج** $|a.b|$

الحل

$$|a| = \left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1$$

$$|b| = \left|\sqrt{3} - 2\right| = -\sqrt{3} + 2$$

$$|a.b| = |a|.|b| = (\sqrt{3} - 1)(-\sqrt{3} + 2) = -3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2 = -5 + 3\sqrt{3}$$

تدريب

إذا كان: $a = \sqrt{5} - 2,\ b = \sqrt{5} - 3$ **أوجد:** $|a|, |b|$ **ثم استنتج** $|a.b|$

سادساً: الجذر التربيعي

1. الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب

تذكّر

الجذر التربيعي لعدد موجب (a) هو العدد الموجب (b) الذي يحقق: $b^2 = a$

ونكتب ذلك بالرموز: $\sqrt{a} = b$ تكافئ $a = b^2$ (حيث a عدد موجب)

مثال

1. $\sqrt{16} = 4$ لأنّ: $16 = 4^2$

2. $\sqrt{\pi^2} = \pi$

تذكّر

لا يوجد للعدد السالب تماماً جذر تربيعي في $\mathbb{R}$

تعلّم (1)

$a^2 = b^2$ تعني: إما $a = b$ أو $a = -b$

مثال

حلّ المعادلة: $x^2 = 16$

الحل

إمّا $x = \sqrt{16} = 4$

أو $x = \sqrt{16} = -4$

تعلّم (2)

$a^2 = b^2$ وكان a, b موجبين فإنّ: $a = b$

تعلّم (3)

إذا كان a, b موجبين وكان: $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ فإنّ: $a = b$

مثال

حلّ المعادلة (ثم أوجد العدد الحقيقي x):

1. $\sqrt{x-2} = \sqrt{9}$ نربّع الطرفين

$x - 2 = 9$ ومنه: $x = 11$

2. $\sqrt{x+5} = 4$ نربّع الطرفين

$x + 5 = 16$ ومنه: $x = 11$

تدريب

1. **حلّ ما يلي:**

1. $x^2 = 25$
2. $x^2 = 3$
3. $(x-1)^2 = 36$
4. $x^2 - 1 = 0$ انقل (-1) للطرف الثاني وبدّل إشارته

2. **هل يوجد عدد حقيقي x يحقق المساواة؟ (هل للمعادلة حل؟)**

1. $x^2 = -2$
2. $\sqrt{x-2} = -1$
3. $|x+7| = -\sqrt{3}$

2. الجذر التربيعي لجداء عددين حقيقيين موجبين

تعلّم

إذا كان: $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ فإنّ: a, b موجبان

مثال

أوجد ناتج:

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{2\times8}=\sqrt{16}=4$

2. $\sqrt{3}\times\sqrt{27}=\sqrt{.....\times.....}=\sqrt{.....}=9$

ملاحظة

يمكن استخدام القاعدة السابقة ($\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$) في **تبسيط الجذور** .

مثال

بسّط كلاً من: $\sqrt{50}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{8}$

الحلّ

لتبسيط $\sqrt{8}$

نلاحظ أنّ 8 ليس له جذر لذلك نبحث عن عددين ضربهما 8 بحيث يكون أحدهما له جذر

نجد أنّ $8 = 4 \times 2$ ثم نكتب:

$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{.....}\times\sqrt{.....}=2\sqrt{.....}$

لاحظ أنّ $12 = 2\times6$ لكن ذلك لا يفيد، **علل؟**

$\sqrt{18}=\sqrt{9\times.....}=$

$\sqrt{50}=\sqrt{.....\times.....}=5\sqrt{2}$

تدريب

بسّط كلاً ممّا يلي:

1. $\sqrt{27} =$
2. $\sqrt{75} =$
3. $\sqrt{72} =$
4. $\sqrt{288} =$

3. الجذر التربيعي لمربع عدد حقيقي

تعلّم

إذا كان a موجباً: $\sqrt{a^2} = a$

وبشكل عام: أياً كان x عدد حقيقي فإن: $\sqrt{x^2} = |x|$

مثال

أوجد حلّ المعادلات:

1. $\sqrt{x^2} = 5$ 　 نعلم أنّ $\sqrt{x^2} = |x|$

بالتالي $|x| = 5$

ومنه: إمّا $x = 5$ أو $x = -5$

2. $\sqrt{(x-3)^2} = 9$

بالتالي $|x - 3| = 9$

ومنه: إمّا $x - 3 = 9$ أي: $x = 9 + 3 = 12$

أو $x - 3 = -9$ أي: $x = -9 + 3 = -6$

تدريب

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات:

1. $\sqrt{x^2} = 1$
2. $\sqrt{x^2} = 0$
3. $\sqrt{(x-\pi)^2} = \pi - 3$
4. $\sqrt{(3x-1)^2} = 2$

سابعاً: تبسيط عبارة تحوي جذوراً

مثال

بسّط الناتج واكتبه بالشكل $a\sqrt{b}$.

الحلّ

$A = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{108}$

$\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = 5\sqrt{3}$

تبسيط $\sqrt{108}$ نحلّل 108:

108	2	$\rightarrow 2$
54	2	
27	3	$\rightarrow 3$
9	3	
3	3	$\rightarrow \sqrt{3}$
1		

- كلّ عدد مكرّر مرّتين نأخذه مرّة واحدة .
- كلّ عدد مكرّر مرّة واحدة نأخذه جذر.
- ثم نضرب النواتج كما هوموضح .

$\sqrt{108} = 2\times 3\times\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

نعوّض:

$A = 3\sqrt{3} - 2\times 5\sqrt{3} + 3\times 6\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

تدريب

بسّط كلاً ممّا يلي واكتب الناتج بالشكل: $a\sqrt{b}$.

1. $C = \sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$
2. $D = \sqrt{75} - 3\sqrt{12} - \sqrt{48}$
3. $A = \sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{175}$
4. $B = \sqrt{72} + \sqrt{8}$

الدرس الخامس

القسمة في $\mathbb{R}$

عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. قسمة عدد حقيقي على آخر لا يساوي الصفر.
2. إزالة الجذر من مقام الكسر.
3. مجموع ناتجي قسمة .
4. إيجاد القيمة المطلقة لحاصل قسمة عددين حقيقيين.
5. إيجاد الجذر التربيعي لحاصل قسمة عددين حقيقيين.

أولاً: قسمة عدد حقيقي على آخر لا يساوي الصفر

تذكّر

إذا كان a عدد موجباً، b عدد موجباً لا يساوي الصفر فإن: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

مثال

أوجد ناتج ما يلي:

1. $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$

2. $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$

3. $\sqrt{0.36} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{\sqrt{.....}}{\sqrt{.....}} = \frac{.....}{.....} = 0.6$

4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

تدريب

أوجد ناتج ما يلي بأبسط صورة:

1. $\sqrt{\frac{9}{16}}$
2. $\sqrt{\frac{25}{81}}$
3. $\sqrt{\frac{121}{144}}$
4. $\sqrt{0.25}$
5. $\sqrt{0.0049}$
6. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$
7. $\frac{\sqrt{8\sqrt{3}}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$
8. $\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{175}{12}}$
9. $\sqrt{288} \div \sqrt{2}$

ثانياً: إزالة الجذر من المقام

لإزالة الجذر من المقام في الكسر $\frac{a}{\sqrt{b}}$ نضرب بسط الكسر ومقامه بالجذر الموجود في المقام.

مثال

أزل الجذر من المقامات التالية:

1. $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

2. $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{7}}{2\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{35}}{2 \times 7} = \frac{3\sqrt{35}}{14}$

تدريب

أزل الجذور من مقامات الكسور التالية:

1. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{5}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{9}{\sqrt{9}}$
4. $\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$
5. $\frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}$
6. $\frac{|a|}{|b|}$

ملاحظة

من الآن فصاعداً لا يقبل في الناتج وجود جذر في المقام

(في الجبر والهندسة، وللسنوات القادمة)

تدريب

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات:

① $\sqrt{6}x = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$

② $2\sqrt{2}x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

③ $\sqrt{3}x = 3$

④ $\sqrt{2}x = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

2. أوجد ناتج:

① $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5}$

② $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{8}}$

ثالثاً: القيمة المطلقة للقسمة

تعلّم

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حيث $(b \neq 0)$

نشاط

ليكن العددان: $b = 12\sqrt{8}$, $a = -3\sqrt{2}$ **أوجد:** $|a|$ **ثم** $|b|$ **ثم استنتج** $\left|\frac{a}{b}\right|$ ؟

مثال

حلّ المعادلة: $\left|\frac{x}{-2}\right| = 2$

الحل

$\left|\frac{x}{-2}\right| = 2$ تعني: $\frac{|x|}{|-2|} = 2$ وبالتالي $\frac{2}{1} = \frac{|x|}{2}$ أي: $1\times|x| = 2\times 2$ ومنه: $|x| = 4$

أكمل الحل ......

تدريب

حلّ المعادلة: $\left|\frac{x-3\pi}{-5}\right| = \pi$

رابعاً: القيمة المطلقة لقسمة عدد حقيقي على آخر لا يساوي الصفر

نشاط

إذا كان $a = -\sqrt{3}$ **و** $b = \pi$**، فأوجد ناتج كلّ من** $\frac{|a|}{|b|}$, $\left|\frac{a}{b}\right|$ **ثُمَّ قارن بينهما.**

تعلّم

إذا كان a وb عددان حقيقيان حيث $b \neq 0$ فإنّ: $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$

تطبيق

ليكن $b = 12\sqrt{8}$, $a = -3\sqrt{2}$ **أوجد كلاً من:** $|a|$ **و** $|b|$ **واستنتج قيمة:** $\left|\frac{a}{b}\right|$

الحلّ

$|a| = \left|-3\sqrt{2}\right| = 3\sqrt{2}$

$|b| = \left|12\sqrt{8}\right| = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{3\sqrt{2}}{24\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$

تدريب

أوجد القيمة المطلقة لـ x إذا علمت أنّ: $\left|\frac{x}{-\sqrt{3}}\right| = 4$

مثال

إذا كان $a = 5$ و$b = 4$ فقارن بين $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ **و** $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ **ماذا تستنتج؟**

الحل

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{4})^2} = \frac{5}{4}$$

إذاً: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

تعلّم

إذا كان a و b عددان حقيقيان حيث $b \neq 0$ فإنّ: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

مثال

اختصر كلاً من: $\frac{\sqrt{7\pi}}{\sqrt{4\pi}}$ ، $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}}$ ، $\sqrt{\frac{36}{25}}$

الحلّ

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{6}{18}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{7\pi}}{\sqrt{4\pi}} = \sqrt{\frac{7\pi}{4\pi}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

تدريب

أوجد ناتج كلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} =$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{72}} =$$

$$\frac{\sqrt{8\sqrt{2}}}{\sqrt{9\sqrt{2}}} =$$

الدرس السادس

القِوى في $\mathbb{R}$

عزيزي الطالب /عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. قوّة عدد حقيقي .
2. إشارة ناتج قوّة .
3. خواص القوى في $\mathbb{R}$

أولاً: قوّة عدد حقيقي

تذكّر

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

ندعو 3^4 قوّة أساسها 3 وأسها 4

وبشكل عام:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \ldots \times a}_{\text{n مرة}}$$

ملاحظات هامة

- $1^n = 1$
- $a^0 = 1$ بحيث $(a \neq 0)$
- $0^n = 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^1 = a$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

تدريب

1. **أوجد ناتج:**

1. $\left(\sqrt{5}\right)^4$
2. $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$
3. $(-7)^0$
4. $(\pi)^3$

2. **احسب العدد النسبي a إذا علمت أنّه قوة أساسها $\frac{-2}{5}$ وأسها 4 .**

ثانياً: إشارة ناتج قوى

1) إذا كان a موجب فإن a^n موجب

2) إذا كان a سالب فإن a^n ← موجب عندما n زوجي

← سالب عندما n فردي

$$\left[(-)^{\text{عدد زوجي}} = + \text{ ،} (-)^{\text{عدد فردي}} = -\right]$$

مثال

أوجد إشارة قيمة كل من القوى:

1. العدد $(+3)^5$ إشارته موجبة لأنّ الأساس $(+3)$ موجب
2. العدد $(+7)^{-6}$ إشارته موجبة لأنّ الأساس $(+7)$ موجب
3. العدد $(-3)^7$ إشارته سالبة لأنّ:

    1. الأساس (-3) سالب   2. الأس (7) فردي

4. العدد $(-6)^8$ إشارته موجبة لأنّ الأس زوجي (8)

ملاحظة

تكون إشارة القوة سالبة في حالة وحيدة هي: الأساس سالب تماماً والأس فردي

تدريب

أوجد إشارة كلّ قوّة ممّا يلي:

1. $\left(-\sqrt{5}\right)^{2012}$
2. $(-7)^{31}$
3. $(9)^{321}$
4. $\left(\frac{-3\pi}{2\sqrt{3}}\right)^{5}$
5. $\left(\frac{-3}{-\sqrt{2}}\right)^{17}$
6. $(\pi-4)^{17}$

ثالثاً: خواص القوى في $\mathbb{R}$

1. جداء قوّتين لهما الأساس نفسه

$$\left\{a^{n}\times a^{m}=a^{n+m}\right\}$$

أمثلة

1. $(3)^{5}\times(3)^{2}=(3)^{5+2}=3^{7}$
2. $\left(\sqrt{5}\right)^{3}\times\left(\sqrt{5}\right)^{5}=\left(\sqrt{5}\right)^{8}$
3. $(\pi)^{4}\times(\pi)^{-6}=(\pi)^{4-6}=\pi^{-2}$
4. $\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}\right)^{-4}=\left(\sqrt{2}\right)^{1-4}=\left(\sqrt{2}\right)^{-3}$

2. قسمة قوّتين لهما الأساس نفسه

$$\left\{\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}\right\}$$

أمثلة

1. $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^{5}}{\left(\sqrt{2}\right)^{3}}=\left(\sqrt{2}\right)^{5-3}=\left(\sqrt{2}\right)^{2}$

2. $\dfrac{3^{2}}{3^{7}}=3^{2-7}=3^{-5}$

3. $\dfrac{\pi^{2}}{\pi^{-3}}=\pi^{2-(-3)}=\pi^{5}$

3. قوة جداء

$$\left\{(a\times b)^{n}=a^{n}\times b^{n}\right\}$$

أمثلة

اكتب على شكل قوّة واحدة:

1. $(3)^{5}\times(2)^{5}=(3\times2)^{5}=6^{5}$

2. $\left(\sqrt{5}\right)^{3}\times\left(3\sqrt{5}\right)^{3}=\left(\sqrt{5}\times3\sqrt{5}\right)^{3}=(3\times5)^{3}=15^{3}$

3. $\pi^{-5}\times\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{-5}=\left(\pi\times\dfrac{3}{\pi}\right)^{-5}=3^{-5}$

4. قوّة قسمة

$$\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}\right\}$$

أمثلة

1. اختصر:

$$\frac{\left(\sqrt{21}\right)^3}{\left(\sqrt{28}\right)^3}=\left(\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{28}}\right)^3=\left(\sqrt{\frac{21}{28}}\right)^3=\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

2. اكتب كلاً ممّا يلي على شكل قوّة أساسها عدد حقيقي:

1. $\frac{a^4}{16}=\frac{a^4}{2^4}=\left(\frac{a}{2}\right)^4$

2. $\frac{b^3}{2\sqrt{2}}=\frac{b^3}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{b^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^3$

تدريب

اكتب على شكل قوّة أساسها عدد حقيقي:

1. $\frac{\left(\sqrt{12}\right)^3}{\left(\sqrt{24}\right)^3}$

2. $\frac{c^5}{32}$

3. $\frac{b^5}{4\sqrt{2}}$

4. $\frac{a^3}{\sqrt{27}}$

5. قوّة القوّة

$$(a^n)^m=a^{n\times m}$$

أمثلة

$$\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3=\left(\sqrt{2}\right)^{2\times3}=\left(\sqrt{2}\right)^6$$

$$(\pi^5)^{-3}=\pi^{5\times(-3)}=\pi^{-15}$$

$$\left[\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-2}\right]^{-6}=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{(-2)\times(-3)}=\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{+12}$$

تمارين عامة على خواص القوى

1. اكتب بشكل قوّة وحيدة كلاً ممّا يلي:

① $a^3 \times a^5 =$

② $(a^2)^3 \times a^{-5} =$

③ $\dfrac{\left(b^{-2}\right)^3 \times b}{b^3} =$

④ $\dfrac{9\pi^2 \times a^2}{b^2} =$

2. اكتب الناتج بأبسط صورة ممكنة:

① $a^4 \times b^3 \times a \times b^{-2} =$

② $\dfrac{x^3 \times x^{-1} \times y}{y^3 \times x^3} =$

③ $(a^3 \,.\, b^{-2} \,.\, c)^5 \times (a^4 \,.\, b^3 \,.\, c^{-2})^2 =$

3. ضع إشارة أكبر > أوأصغر < أويساوي = في الفراغ:

① $(-3)^{12} \ldots\ldots 0$

② $\left(\sqrt{5}\right)^{-3} \ldots\ldots 0$

③ $(0)^{100} \ldots\ldots 0$

④ $(-3)^4 \ldots\ldots (-3)^5$

⑤ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \ldots\ldots 5^{-2}$

⑥ $(\pi-3)^2 \ldots\ldots (\pi-3)^2$

تمرينات على الوحدة

1. أوجد قيمة x فيما يلي (حلّ المعادلات):

1. $|x-3|=0$
2. $|2x-\pi|=3\pi$
3. $\left|x-\sqrt{3}\right|=-2$
4. $\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}$
5. $\sqrt{(3x-3)^2}=6$
6. $x^2=16$
7. $(x-2)^2=8$
8. $(x-2)^2-9=0$

2. انشر كلاً ممّا يلي:

1. $A=3(2x-5)$
2. $B=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-5\right)$
3. $C=\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$
4. $D=(x-3)(x+2)$
5. $E=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$

3. اكتب كلاً ممّا يلي بأبسط صورة:

1. $A = \sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 10\sqrt{8}$

2. $B = \sqrt{99} - 10\sqrt{1100} + 6\sqrt{396}$

3. $C = \sqrt{\frac{27}{51}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$

4. $D = \sqrt{\frac{7}{3}} \times 4\sqrt{\frac{63}{75}} - 2\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{27}}$

5. $E = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$

4. أزل الجذر من مقام كل كسر ممّا يأتي:

$\frac{15}{\sqrt{5}}, \quad \frac{-7}{\sqrt{14}}, \quad \frac{5}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{\frac{11}{36}}$

5. بيّن أنّ:

1. $\left(\sqrt{2}\right)^{-3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. $\left(\sqrt{5}\right)^{-5} = \frac{\sqrt{5}}{125}$

6. حلل كلاً ممّا يأتي:

1. $A = 4a - 4b + 4c$

2. $B = 3x - 6y + 12$

3. $C = (x - 3)\,a + b(x - 3)$

4. $D = \sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{2}x$

اختبار وحدة الأعداد النسبيّة ووحدة الأعداد الحقيقية

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يأتي:

أ. العدد الأوليّ من بين الأعداد الآتية هو:

1. 261
2. 119
3. 503
4. 375

ب. إذا كان $a = 1024$ ، $b = 80$ فإنّ ع.م.أ للعددين هو:

1. 8
2. 16
3. 4
4. 32

ج. ناتج: $\sqrt{32+\sqrt{13+\sqrt{5+4}}}$ هو:

1. 8
2. $2\sqrt{6}$
3. 6
4. $\sqrt{6}$

د. تبسيط $\frac{9}{3\sqrt{3}}$ هو:

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
2. $\sqrt{3}$
3. 3
4. 1

السؤال الثاني: بسّط العبارة الآتية: $3\sqrt{20}+2\sqrt{45}-\sqrt{125}$

السؤال الثالث: بيِّن أنّ $2\sqrt{2}$ ناتج ما يأتي:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

السؤال الرابع: أوجد قيمة في كلّ من المعادلتين:

1. $|x+3|=2$
2. $\left(x+\sqrt{2}\right)(x+5)=0$

انتهت الأسئلة

الدرس الأول

النسب والمعدّلات

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. التمييز بين النسبة والمعدّل.
2. سلسلة النسب المتساوية.

مقدمة

يُعدُّ التناسبُ مقدمةً لأبواب كثيرة من العلوم، لما فيه من خواصَّ عملية تطبيقية يحتاج إليها الفيزيائي في مختبره، والكيميائي في معمله، إضافة إلى ما في دراسة الرياضيات من تطبيقات متعددة للتناسب ومن أكثرها شيوعاً: الضرب التقاطعي، والتناسب الطردي، والتناسب العكسي.

أولاً: النسب والمعدّلات

تذكّر

النسبة: هي مقارنة بين مقدارين (بالقسمة).

المعدّل: هو نسبة يكون حدّاها من وحدتين مختلفتين.

مثال

يستطيع كلب الجري مسافة 562m خلال ثلاث دقائق:

المعدّل $= \frac{562}{3}$

تدريب

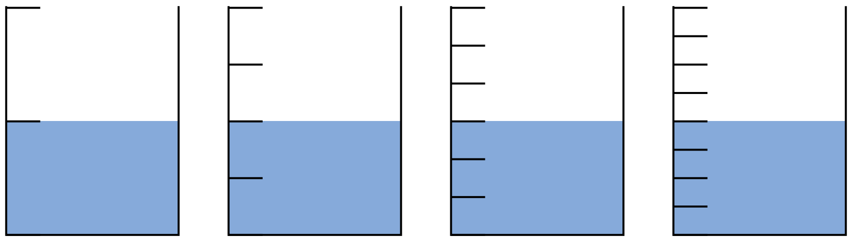
ضع اشارة ✓ أمام كل معدل من بين النسب التالية:

1. عرض المستطيل إلى طوله.
2. أدرس 7 ساعات في اليوم.
3. إنتاج معمل 250 قميصاً في اليوم.
4. طول فتاة إلى كتلتها.

ثانياً: سلسلة النسب المتساوية

مثال

كمية الماء في كلّ وعاء متساوية:



$$\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{4}} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{6}} = \frac{\boxed{4}}{\boxed{8}}$$

تذكّر

خواص النسبة:

لا تتغير قيمة النسبة في حالتين:

1. إذا ضربنا حدي النسبة بعدد $\neq 0$.
2. إذا قسمنا حدّي النسبة على عدد $\neq 0$.

مثال

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

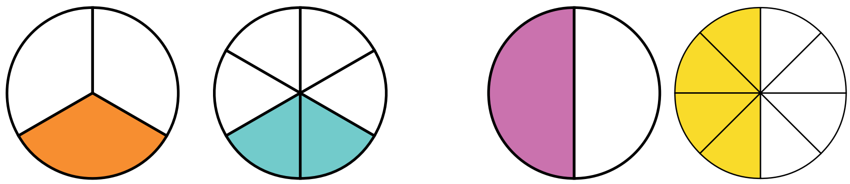
ندعو سلسلة النسب السابقة بسلسلة النسب المتساوية.

تعلّم

يمكن الحصول على سلسلة من النسب المتساوية:

بضرب أو قسمة حدّي النسبة بعدد حقيقي مغاير للصفر.

نشاط 1



$$\frac{1}{3} = \frac{\boxed{}}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{\boxed{}}{8}$$

نشاط 2

إملأ الفراغ بالعدد المناسب:

$$\frac{4}{7} = \frac{....}{21} = \frac{16}{....} = \frac{....}{....} =$$

$$\frac{48}{36} = \frac{16}{....} = \frac{....}{9} = \frac{....}{....} =$$

تدريب

قطعة أرض مستطيلةُ الشّكل مساحتها $3600\ m^2$، املأ الجدول الآتي لحساب أحد بعدي قطعة الأرض عند معرفة البعد الآخر.

البعد الأوّل	40	60	……	100	……	50
البعد الثّاني	90	……	120	……	180	……

مثال محلول

لتكن سلسلة النسب المتساوية $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ ولنتحقق من أنّ النسبة $\frac{1+2+3}{2+4+6}$

تساوي أيّ واحدة من النسب السابقة.

الحلّ

$$\frac{1+2+3}{2+4+6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

تعلّم

في سلسلة النسب المتساوية:

إنّ أيّة نسبة منها تساوي نسبة مجموع البسوط إلى مجموع المقامات

أي إذا كان: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ فإنّ: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}$ **على ألا يكون المقام معدوماً**

تدريب

إملأ الفراغ بما يناسب:

$$\frac{7}{9}=\frac{14}{....}=\frac{....}{27}=\frac{7+....+....}{....+....+27}=\frac{....}{....}$$

تدريب

A B C مثلث قياسات زواياه تشكل سلسلة النسب المتساوية $\frac{A}{3}=\frac{B}{3}=\frac{C}{5}$ أوجد قياسات زوايا المثلث.

إرشاد للحل

احصل على نسبة تساوي كلاً من النسب السابقة وذلك بتطبيق الخاصة السابقة

نسبة جمع البسوط إلى جمع المقامات، ثم تذكر أنّ:مجموع زوايا المثلث يساوي 180.

الدرس الثاني

تطبيقات على التناسب

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. خواص التناسب.
2. الرابع المتناسب.
3. التناسب الطردي والتناسب العكسي.

أولاً: خواص التناسب

تذكّر

التناسب:

هو تساوي نسبتين أوأكثر

خواص التناسب: ليكن التناسب: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإنّ:

1. جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين أي $a \times d = b \times c$
2. إذا ثبتنا المقام وجمعنا البسوط إلى المقامات فإنّ التناسب يبقى صحيحاً أي: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
3. إذا ثبتنا البسط وجمعنا المقامات إلى البسوط فإنّ التناسب يبقى صحيحاً أي $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

مثال

المثلث $A\ B\ C$ قائم في B، أوجد قياس كلّ من الزاويتين A, C علماً أنّ: $\frac{2}{7}=\frac{A}{C}$

الحل

بما أنّ مجموع زوايا المثلث 180 والمثلث قائم في B فإنّ:

$A + C = 180 - 90 = 90$ نوّظف خواص التناسب على التناسب: $\frac{2}{7}=\frac{A}{C}$

$$\frac{2+7}{7}=\frac{A+C}{C}$$

ومنه: $\frac{9}{7}=\frac{90}{C}$

ومنه حسب خاصة جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين: $C=\frac{90\times 7}{9}=70$

ومنه: $A=90-70=20$

تدريب

أوجد قيمة كل من $x,\ y$ في التناسب التالي: $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$ علماً أن: $x+y=36$

مثال

أوجد عددين موجبين فرقهما 28 ونسبتهما $\frac{12}{5}$

الحلّ

نفرض العدد الكبير x ونفرض العدد الصغير y ومنه: $x-y=28$ و $\frac{x}{y}=\frac{12}{5}$

نطبق خواص التناسب: $\frac{x-y}{y}=\frac{12-5}{5}$

ومنه: $\frac{28}{y}=\frac{7}{5}$

ومنه: $y=20$ و $x=28+20=48$

تدريب

1. أوجد عددين موجبين فرقهما 12 ونسبتهما $\frac{8}{5}$
2. إذا كان مجموع عمري طالبين 30 سنة ونسبة عمريهما $\frac{2}{3}$ فأوجد عمر كلّ منهما.
3. إذا كان $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$، فأوجد $x,\ y,\ z$ علماً أنّ $3x-y+2z=671$

إرشاد لحل رقم 3

اضرب النسبة الأولى بالعدد 3 ثم النسبة الثانية بالعدد -1 ثم النسبة الثالثة بـ 2 .

مثال

وزّع محمد مبلغ 2380 ليرة سورية على ولديه رشيد وبشير بنسبة $\frac{3}{4}$ ، أوجد حصّة كلّ منهما.

الحل

$\frac{\text{حصة رشيد}}{\text{حصة بشير}} = \frac{3}{4}$ بجمع البسط إلى المقام نجد $\frac{\text{حصة رشيد}}{\text{حصة رشيد + حصة بشير}} = \frac{3}{4+3}$

استنتج أنّ حصة رشيد 1020 ليرة سورية وحصة بشير 1360 ليرة سورية.

تدريب

وزّع رجل مبلغ 4480 ليرة سورية على ولديه حسان وسمير بنسبة $\frac{8}{5}$.

أوجد حصة كلّ منهما.

ثانياً: الرابع المتناسب

مثال

لاحظ التناسب التالي: نقول عن الأعداد 27 ,6 ,9 ,2 أنّها متناسبة.

$\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ وندعوالعدد الرابع 27 بالرابع المتناسب.

تعلّم

إذا كان $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ نسمي الأعداد المرتبة a, b, c, d متناسبة ويسمى d بالرابع المتناسب.

مثال

أوجد الرابع المتناسب للأعداد المرتبة 16 ,8 ,4 .

نرمز للرابع المتناسب بـ x ومنه: $\frac{16}{x} = \frac{4}{8}$.

نطبّق خاصة الضرب التقاطعي فنجد: $(4) . (x) = (8) . (16)$

نقسّم الطرفين على 4 فنجد: $\frac{8\times16}{4} = \frac{4x}{4}$.

ومنه $x = 32$.

تدريب

أوجد الرّابع المتناسب مع كلّ مجموعة ممّا يأتي:

1. $7.2,\ 12,\ 5.3$
2. $8.5,\ 13,\ 20.5$
3. $7.2,\ 3,\ 12$
4. $5,\ 9\sqrt{3},\ 3$

ثالثاً: التناسب الطردي والتناسب العكسي

التناسب الطردي

مثال توضيحي

إذا كانت أجرة عامل 50 ليرة في الساعة فإنّ أجره في 3 ساعات 150 ليرة وأجره في 5 ساعات 250 ليرة.

نلاحظ أنّ:

الأجرة تتزايد مع تزايد ساعات العمل، أي أنّ الأجرة وساعات العمل تتزايدان معاً ويمكننا التعبير عن النص السابق بالتناسب: $50 = \frac{250}{5} = \frac{150}{3} = \frac{50}{1}$.

ونقول: إنّ الأجور $50, 150, 250$ تتناسب طرداً مع الأعداد $1, 3, 5$ على الترتيب و 50 ثابت التناسب الطردي

تعلّم

تكون المقادير a, b, c متناسبة طرداً مع المقادير x, y, z المغايرة للصفر وبالترتيب ذاته إذا كان: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

مثال

أوجد ثلاثة أعداد متناسبة طرداً مع الأعداد $(2, 5, 9)$ ومجموعها 960.

الحل

نفرض الأعداد التالية: x, y, z التي منهم نستطيع تشكيل التناسب: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9}$.

وباستخدام خواص التناسب: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = \frac{x+y+z}{2+5+9} = \frac{960}{16} = 60$.

نستنتج: $\frac{x}{2} = 60$ ومنه: $x = 120$.

أيضاً: $\frac{y}{5} = 60$ ومنه: $y = 300$.

وأيضاً: $\frac{z}{9} = 60$ ومنه: $z = 540$.

أي أن الأعداد الثلاثة هي: $120, 300, 540$.

تدريب

حلّ كلاً من المسائل التالية:

1. أوجد قياسات زوايا مثلث A B C إذا كانت متناسبة طرداً مع الأعداد $2, 3, 5$.
2. اشترك ثلاثة عمال في نقل 2250 بلاطة لمبنى قيد الإنشاء، فإذا علمت أنّ مساهماتهم تتناسب طرداً مع أعمارهم، وهي / 27 – 25 – 23 / سنة، وأنّ صاحب العمل يعطي ليرة سورية أجرة نقل كلّ بلاطة، فاحسب نصيب كلّ واحد منهم من الأجر.
3. أسهم ثلاثة أخوة في شراء حاسوب محمول من مكافآت حصلوا عليها في نهاية العام الدراسي، على أن تتناسب إسهاماتُهم مع الصفوف التي كانوا يدرسون فيها، فإذا كانت قيمة الحاسوب 26000 ليرة سورية، وكان الإخوة في الصفوف (السابع والتاسع والعاشر) فأوجد إسهام كلّ واحد منهم.

التناسب العكسي

مثال توضيحي

تقطع سيّارة المسافة بين مدينتين بـ 6 ساعات حيث معدّل سرعتها $60\ km\ .\ h^{-1}$.

بينما تقطع سيّارة المسافة ذاتها في 4 ساعات حيث معدّل سرعتها $90\ km\ .\ h^{-1}$.

وبينما تقطع سيّارة المسافة ذاتها في 3 ساعات حيث معدّل سرعتها $120\ km\ .\ h^{-1}$.

نلاحظ أنّ: زمن الوصول يتناقص مع تزايد السرعة.

أي أنّ: زمن الوصول يتناسب عكساً مع السرعة.

ومنه: يمكننا التعبير عن العلاقة بين زمن الوصول والسرعة بما يلي:

$$\frac{6}{\frac{1}{60}} = \frac{4}{\frac{1}{90}} = \frac{3}{\frac{1}{120}}$$

أي: $6 \times 60 = 4 \times 90 = 3 \times 120 = 360$ 360 ثابت التناسب العكسي

تعلّم

تكون المقادير a, b, c متناسبة عكساً مع المقادير x, y, z وبالترتيب ذاته إذا تحقق مايلي:

$$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}}$$

أي: $a \times x = b \times y = c \times z$

مثال

أوجد قياسات زوايا مثلث ABC إذا كانت قياساتها تتناسب عكساً مع الأعداد 2, 3, 6 .

الحل

بما أنّ التناسب عكسي بين الزوايا والأعداد 2, 3, 6 فإن:

$$\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{6}} = \frac{A+B+C}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{180}{1} = 180$$

ومنه: $\frac{A}{\frac{1}{2}} = 180$ بالتالي $A \times 2 = 180$ ومنه: $A = 90^\circ$

وأيضاً: $\frac{B}{\frac{1}{3}} = 180$ بالتالي $B \times 3 = 180$ ومنه: $B = 60^\circ$

وأيضاً: $\frac{C}{\frac{1}{6}} = 180$ بالتالي $C \times 6 = 180$ ومنه: $C = 30^\circ$

تدريب

حلّ المسائل التالية:

1. تملأ حنفيتان متماثلتان حوضاً من الماء في 30 ساعة، كم ساعة يلزم خمس حنفيات مماثلة للحنفيتين السابقتين لملء هذا الحوض؟
2. تتم آلة العجن في فرن آلي عجن 3600 كيلوغرام من الطحين خلال ثماني عشرة ساعة، بكم ساعة يتم عجن الكمية ذاتها بآلتين للعجن من النوع ذاته، وبكم ساعة يتم إنجاز العمل بثلاث آلات للعجن من النوع ذاته.

الدرس الثالث

النسبة المئوية

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

- الربط بين النسبة المئوية والكسور

تذكّر

كل من: $\frac{1}{10}, \frac{7}{100}, \frac{83}{1000}, \ldots\ldots$ كسور عشرية.

كل من: $25.6, 6.21, 1.05, \ldots\ldots\ldots$ أعداد عشرية.

كل من: $1\frac{5}{18}, 2\frac{9}{25}, \ldots\ldots\ldots$ أعداد كسرية.

كل من: $\frac{7}{75}, \frac{2}{9}, \frac{5}{15}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ كسور عادية.

كل من: $\frac{5}{100} = 5\%, \frac{25}{100} = 25\%, \frac{3}{100} = 3\% \ldots$ نسب مئوية.

مثال

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

نشاط

املأ الفراغ بالعدد المناسب:

1. أعبر عن النسبة المئوية 75% بالكسر:

$$75\% = \frac{\ldots\ldots}{100} = \frac{1}{\ldots\ldots}$$

2. أعبر عن النسبة المئوية 75% بالعدد العشري:

$$75\% = 75 \div 100 = \ldots\ldots$$

3. أعبر عن النسبة المئوية 225% بالعدد الكسري:

$$225\% = \frac{225}{100} = \frac{\ldots\ldots}{4} = 2\frac{1}{\ldots\ldots}$$

تعلّم

$a\%$ من العدد b هي $a\% \times b$

مثال

لحساب 36% من العدد 450 نكتب: $450 \times 0.36 = 162$

تدريب

1. أوجد 3% من العدد 12.
2. أوجد 40% من العدد 480.

كتابة كسر على شكل نسبة مئوية

مثال 1

$\frac{x}{100} = \frac{6}{8}$ وبالتالي: $x = \frac{100 \times 6}{8} = 75$

ومنه: $\frac{6}{8} = \frac{75}{100} = 75\%$

مثال 2

$$\frac{120}{500} = \frac{120}{5 \times 100} = \frac{2.4}{100} = 2.4\%$$

مثال 3

حوّل الكسر $\frac{12}{5}$ إلى نسبة مئوية:

1. اكتب العملية

$$\frac{12}{5} = \frac{x}{100}$$

2. استخدم خاصة الضرب التقاطعي

$$12 \times 100 = 5 \times x$$

$$1200 = 5x$$

$$240 = x$$

3. اكتب الكسر على شكل نسبة مئوية

$$\frac{12}{5} = 240\%$$

مثال 4

$$\frac{5}{8} = \frac{x}{100}$$

$$500 = 8x$$

$$x = 62.5$$

$$\frac{5}{8} = 62.5\%$$

تدريب 1

اكتب كلاً ممّا يلي على صورة نسبة مئوية:

$$\frac{5}{7},\ \frac{150}{400},\ \frac{476}{34}$$

تدريب 2

ضع إشارة > أو < أو = في الفراغ لتصبحَ العبارةُ صحيحةً:

1. $2\% \ldots\ldots 0.02$
2. $75\% \ldots\ldots \frac{3}{4}$
3. $4 \ldots\ldots 40\%$
4. $30\% \ldots\ldots 30$
5. $5\% \ldots\ldots 0.50$
6. (25% من 200) ...... (4% من 120)

توجيه

عند المقارنة بين عددين يجب أن يكون الطرفان من النوع نفسه:

عددين عشريين، عددين كسريين، نسبتين مئويتين

تعلّم

$a\% \ (b+c) = a \ . \ b\% + a \ . \ c\%$

مثال 1

حصلت عبير على %90 من مجموع درجات امتحاني الفصلين الأول والثاني للرياضيات (درجة كل منهما 60)، إذا علمت أنّ درجتها في الفصل الأول 50، فكم كانت درجتها في امتحان الفصل الأول؟

الحل

مجموع الدرجات في الامتحانين $90\% \times (60+60) = \frac{90}{100} \times 60 + \frac{90}{100} \times 60 = 108$

درجتها في امتحان الفصل الثاني: $180 - 50 = 58$ (درجة)

مثال 2

في معرض لبيع السيّارات انخفض سعر السيّارة في عام واحد من 800000 ليرة سورية إلى 600000 ليرة سورية، ما نسبة انخفاض سعر السيّارة؟

الحل

مقدار الانخفاض: $800000 - 600000 = 200000$ (ليرة سورية)

$\frac{x}{100} = \frac{20000}{800000}$ وبالتالي: $x = \frac{100 \times 800000}{200000} = 2.5$

مسائل

1. قطعة معدنية وزنها 600g تحوي %4 من وزنها، كم وزنها دون شوائب؟
2. في صالة بيع تمّ تخفيض ثمن المعطف من 4000 ليرة سورية إلى 3200 ليرة سورية، وتخفيض ثمن زوج الأحذية من 1000 ليرة سورية إلى 750 ليرة سورية والمطلوب:
   أ. أيّ السلعتين كان مقدار التخفيض في سعرها أكبر؟
   ب. أيُّ السلعتين كانت نسبة التخفيض في سعرها أعلى؟
3. اشترى تاجر 50 لعبة بمبلغ 8000 ليرة سورية واكتشف فيما بعدُ أنّ 5 لعب منها تالفة فإذا باع كلّ لعبة من اللعب المتبقية بسعر 200 ليرة سورية، فما مقدار ربح التاجر؟ وما نسبة ربحه؟
4. حقق تاجر ربحاً قدره 1260 ليرة سورية في بيع 100 كيلوغرام من مادة السّماد الكيميائي، فإذا كانت نسبة ربحه %15، احسب المبلغ الذي دفعه التّاجر لشراء الكيلوغرام الواحد من هذا السّماد.

الدرس الرابع

تتمات في النسبة المئوية

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على ماتريد أن نتعلمه:

- تقدير وتغيّر النسبة المئوية.

تقدير النسبة المئوية

تذكّر

التقدير: هو إعطاء جواب ذهني وسريع ومقبول، تزداد درجة معقوليته كلّما اقترب من الحقيقة.

أمثلة

- لتقدير ناتج عملية: نقرّب الأعداد إلى أقرب عدد يسهل حسابه ثم نجري العملية:

$$513 \times 22 \approx 500 \times 20 = 10000$$

- إنّ 49% من العدد 90 تقدر بـ 50% من العدد 90 أي 45 .
- 75% من العدد 407 تقدر بـ 75% من العدد 400 أي 300 .

تدريب

قدّر:

1. 25% من العدد 198
2. 37% من العدد 73
3. 150% من العدد 610

تغيّر النسبة المئوية

مثال توضيحي

في نهاية فصل الصيف، أعلن أحد محال بيع الألبسة عن تنزيلات على نوع من القمصان بمقدار 30% فإذا كان سعر القميص 900 ليرة سورية. (**ملاحظة**: يمكن كتابة الواحدة (ليرة سورية) بالشكل (ل.س).

فإنّ مقدار التخفيض في السعر هو: (ل . س) 270 = ... × ....

السعر الجديد للقميص: (ل . س)630 = 270 − 900

طريقة ثانية للحلّ

ويمكن حسابُ السّعر الجديد: $900 - (30\%) \times 900 = 630$ (ل.س)

بحسب خاصة توزيع الضرب على الجمع والطرحُ، يُحسب السّعر الجديد على الشّكل الآتي:

$900 \times (1 - 0.30) = 900 \times \ldots\ldots = 630$ (ل.س)

تعلّم

نقصان المقدار a بنسبة b% يجعل المقدار الكلي $a\,(1 - b\%)$

مثال توضيحي

في أحد المطاعم بلغَتْ فاتورةُ أحد الزبائن 4000 ليرة سورية، فإذا أضيف إليها 10% من قيمتها أجرة خدمة الزبون عندئذٍ:

مقدار الإضافة هو: $4000 \times \ldots\ldots\ldots = 400$ (ل . س)

ويكون إجمالي الفاتورة هو ....

طريقة ثانية

$4000 \times (1 + \ldots\ldots) = 4000 \times (1\ .1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

تعلّم

زيادة نقصان المقدار a بنسبة b% يجعل المقدار الكلي $a\,(1 + b\%)$

تدريب

قطعة شوكولا ثمنها 50 ليرة، ازداد ثمنها بنسبة مئوية 6%، كم سيصبح ثمنها بعد الزيادة؟

اختبار وحدة النسبة والتناسب والنسبة المئوية

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصّحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

1 إذا كان $\frac{\sqrt{7}+1}{3}=\frac{x}{\sqrt{7}-1}$ فإنَّ x تساوي:

7	6	3	2

2 إنَّ 34% من 450 تساوي:

153	135	143	134

3 إذا كان العددان x, y متناسبين عكساً مع العددين 1, 2 وفق هذا الترتيب فإنَّ:

$x=y$	$x=2y$	$y=2x$	$x+y=3$

4 إذا كان $\frac{x-y}{x}=\frac{x+y}{x}$ فإنَّ:

$x=2,\ y=2$	$x=0,\ y=0$	$x\neq 0,\ y=0$	$x=2,\ y\neq 0$

السؤال الثاني: حلّ التدريبين الآتيين:

1. أوجد عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$

2. يزيد عمر طارق على عمر ماهر بمقدار أربع سنوات فإذا كانت نسبة عمريهما $\frac{3}{5}$ أوجد عمر كلّ منهما.

السؤال الثّالث: حلّ المسألة الآتية:

بمناسبة نهاية الموسم، تم تخفيض سعر الحقيبة المدرسية من 500 ليرة سورية إلى 350 ليرة سورية، وتمّ تخفيض ثمن الدفتر من 80 ليرة سورية إلى 65 ليرة سورية. والمطلوب: احسب نسبة التخفيض في كلّ من السّلعتين، ثُمّ وازن بين النّتيجتين.

انتهت الأسئلة

الدرس الأول

التعابير الجبرية

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. مفهوم الحدّ الجبري وأنواعه.
2. إجراء العمليات الأربع على الحدود الجبرية (جمع حدّين- طرح حدّين- ضرب حدّين- قسمة).
3. توظيف الضرب في عمليات النشر.
4. استنتاج المتطابقات التربيعية.
5. توظيف المتطابقات في إزالة الجذور من المقامات.

مقدمة

لغةُ الجبر لغةٌ عالميّةٌ، إذ تعتمدُ على الرُّموز والتّعابير الجبريّة وفيها نتعرّف التّراكيبَ الجبريّة وما يتمّ عليها من جمع وضرب وقسمة وتحليل، وهي مدخلٌ مناسب للتّعرُّف بالمعادلات الجبرية

أولاً: مفهوم الحد الجبري وأنواعه

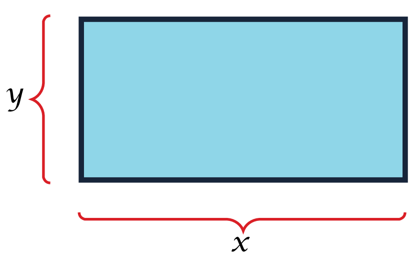
تذكّر

تعلمت سابقاً أنّه يمكن:

1. ترميز القيمة المجهولة بمتغير
2. يمكن تعويض قيمة المجهول بقيمة عددية

تعريف الحد الجبري

من خلال المثال التالي سنتعرّف على مفهوم **الحدّ الجبري:**



1. نعلم أنّ للمستطيل بعدين هما الطول والعرض
   - عبارة (طول المستطيل) نرمز لها بـ حرف مثل x
   - عبارة (عرض المستطيل) نرمز لها بـ حرف مثل y
   - وتكون مساحته = الطول × العرض = $x \cdot y$
2. يملك سامر مبلغاً من المال يمكن أن نعبر عن قيمته المجهولة بـ x، ويملك أحمد ثلاثة أضعاف ما يملك سامر ونرمز له بـ $3x$، ويملك خالد بقدر ما يملك صديقيه معاً أي $4x$

(جميع ما سبق من الترميز هي حدود جبرية)

نلاحظ ممّا سبق أنّ الحدّ الجبري له قسمان: 1. قسم حرفي

2. قسم عددي

مثال

الحدّ الجبري	القسم العددي	القسم الحرفي
$7y$	7	y
$27x^2y^3$	27	$x^2\ y^2$
$12\,y\,x\,z$	12	$x\,y\,z$
$x \cdot y$	1	$x\,y$
x^2	1	x^2

تذكّر

أنواع الحدود الجبرية

الحدّان المتشابهان:

لهما القسم الحرفي نفسه:

مثال $5\,x\,y,\ 11\,x\,y$

$2x^2,\ -3\,x^2$

$7ab,\ 4\,ab$

$8\,ac,\ -6\,ac$

الحدّان الطبوقان:

لهما القسم الحرفي والقسم العددي نفسه:

مثال $5\,x\,y,\ 5\,x\,y$

$8\,y^3,\ 8\,y^3$

$abs,\ abs$

الحدّان المتعاكسان: لهما القسم الحرفي نفسه ومتعاكسان بالقسم العددي

مثال $-3\,x\,y,\ +3\,x\,y$

$-10\,x,\ +10\,x$

$-25\,ab,\ +25\,ab$

تطبيق

املأ الفراغات بما يناسب:

الحدّ الجبري الأول	الحدّ الجبري الثاني	نوعهما
$3\,x\,z$	$8x\,z$	حدان متشابهان
$4\,abc$	$17\,abc$	....
$3ay$	....	حدان متساويان
$8\,xy\,z$	....	حدان متعاكسان
$+2x$	$-2x$	....
$4\,z\,y$	$4\,z^2$	....

ثانياً: العمليات الأربع على الحدود الجبرية

جمع الحدود الجبرية

(نجمع الحدود الجبرية المتشابهه)

تذكّر

يتم الجمع بين الحدود المتشابهة بأن نجمع القسم العددي مع القسم العددي ونحافظ على القسم الحرفي ذاته.

مثال محلول

$2\,c \quad + \quad 3\,c \quad = \quad 5\,c$

أمثلة محلولة

1. $2ab + 3ab = 5ab$
2. $-3x + 4x = 1\ x$
3. $5xy - 4xy + 3xy = 4xy$
4. $8y - 2y + 5x + 8x = 6y + 13x$

ضرب الحدود الجبرية

تذكّر

عند ضرب عدّة قوى لها الأساس نفسه نجمع الأسس

عند ضرب حدّين جبريين:

- نضرب الإشارة بالإشارة
- نضرب العدد بالعدد
- نضرب القسم الحرفي بالقسم الحرفي

مثال محلول

1. $x^5 \,.\, x^2 = x^{2+5} = x^7$
2. $(x^3 y)\,.\,(xy^4) = x^{3+1}\; y^{1+4} = x^4\, y^5$
3. $(-5x)\,.\;(4x^2) = -20x^3$
4. $(9\,xy^2)\;\;(-3\,x\,z) = -27\,x^2\,y^2\,z$

قسمة الحدود الجبرية

تذكّر

لنتذكر قسمة الحدود الجبرية

$x^6 \div x^4 = x^{6-4} = x^2$ (لاحظ طرح الأسس)

$$\frac{-6x^2}{+2x^4} = \frac{-3x}{x^2}$$

$$\frac{-24y^2}{6y} = \frac{-24}{6} \times \frac{y^2}{y} = -4y$$

بشرط أنّ المقام لا يساوي الصفر أينما وجد

تعلّم

لقسمة حدّ جبري على آخر نقسم المعامل العددي على المعامل العددي

ونقسم القسم الحرفي على القسم الحرفي

مثال

$$\frac{2y^2+6y+12y^3}{2y}=\frac{2y^2}{2y}+\frac{6y}{2y}+\frac{12y^3}{2y}=y+3+6y^2$$

تدريب

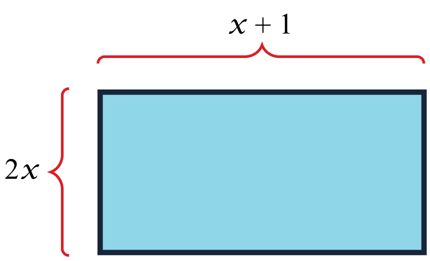
بسّط كلاً ممّا يأتي:

1. $\frac{+24a^2b^2-17b^2}{17b}=$
2. $\frac{25x^2y-15xy+5xy}{5xy}=$
3. $\frac{+24y^3+18y^2}{3y^2}=$
4. $\frac{8x^3}{2x}=$
5. $\frac{10x^2}{2x^5}=$
6. $\frac{-24y^2}{6y^2}=$
7. $\frac{14a^2b^2}{7b}=$

ثالثاً: توظيف الضرب في عمليات النشر

مثال

ليكن المستطيل:



مساحة المستطيل = الطول × العرض

$(2\ x)\ .\ (x+1)=2\ x\ .\ x+2\ x\ (1)$

$=2\ x^2+2\ x$

تدريب

أكمل النشر التالي:

1. $2x(3\ x+2)=2x\ (\dots)+\dots\ (2)$

   $=6x^2+4\ \dots$

2. $4y(y^2+3\ y-1)=4y(\dots)+4y(\dots)-4y(\dots)$

   $=4\dots+12y^2-4\ y$

3. $x(y+2)+y(3+2\ x)=$

   $=xy+2x+3\dots+2\dots$

   $=\dots\ xy+2x+\dots+\dots$

تدريب

أكمل نشر العمليات التالية:

1. $3x(2y+4)-3y(5x+5)=$

   $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$

   $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$

2. $-2a(3a-a+6)=$

   $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$

3. $(x+y).(x-5)=x(x-5)+y(x-5)$

   $= x.x-5x+y\,x-5\dots\dots .$

   $= x^2-5x+\dots\dots -\dots\dots\dots\dots$

4. $(x+7)(x-1)=$

   $= x(\dots\dots\dots\dots)+7(\dots\dots\dots\dots\dots)$

   $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$

رابعاً: المتطابقات التربيعية

أولاً: مربع مجموع حدّين من الشكل $(x+a)^2$

طريقة النشر: $(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+2ax+a^2$

وتُقرأ: مربع مجموع حدّين = مربع الأول +ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني

مثال

لننشر المتطابقات التالية:

$(x+4)^2=x^2+2(4)x+4^2=x^2+8x+16$

$(2x+5)^2=(2x)^2+2(2x)(5)+5^2=4x^2+20x+25$

تدريب

أوجد منشور ما يلي:

1. $(x+3)^2 = x^2 + 2 \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots .$
2. $(2x+3)^2 = \ldots\ldots + 2 \ldots\ldots + \ldots\ldots = 4x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots .$
3. $(5+a)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots .$
4. $(2x+2y)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots .$

ثانياً: مربع فرق حدّين من الشكل $(x-a)^2$

طريقة النشر: $(x-a)^2 = (x-a)\,(x-a) = x^2 - 2\,a\,x + a^2$

وتُقرأ: مربع فرق حدّين = مربع الأول − ضعفي الأول بالثاني + مربع الثاني

أمثلة

1. $(x-4)^2 = x^2 - 2(4)x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
2. $(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2(2\,x)(5) + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

تدريب

أوجد منشور ما يلي:

1. $(x-2)^2 = x^2 - 2(\ldots)(\ldots) + 2^2 = \ldots + \ldots + \ldots .$
2. $(b-7)^2 = b^2 - \ldots\ldots + \ldots = \ldots - \ldots + \ldots .$
3. $(2x-5y)^2 = \ldots - \ldots + \ldots = \ldots - \ldots + \ldots .$
4. $\left(\sqrt{2}-3\right)^2 = 2 - 2\ldots\ldots \times \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots$

ثالثاً: فرق مربعي حدّين

طريقة النشر: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (حيث a, b عددان حقيقيان)

مثال

1. $(a-3)(a+3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$
2. $(x-5)(x+5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
3. $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

تدريب

انشر كلاً من المتطابقات التالية:

1. $(3-b)(3+b)=$
2. $\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)=$
3. $(x-1)(x+1)=$
4. $(y-2)(y+2)=$
5. $(2a+1)(2a-1)=$

خامساً: تطبيق المتطابقة في إزالة الجذر من المقام

مثال

ليكن الكسر $\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)}$ لنوظف المتطابقة السابقة في إزالة الجذر من المقام:

لإزالته نضرب حدي الكسر بمرافق المقام $\left(\sqrt{2}+1\right)$

فيصبح: $$\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{2^2-1}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{4-1}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}$$

تطبيق

أزل الجذر من المقام في كلّ من الكسور التالية:

1. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}=$
2. $\frac{19}{\sqrt{7}-5}=$
3. $\frac{-2}{\sqrt{2}+2}=$
4. $\frac{\sqrt{3}}{0\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$
5. $\frac{8}{0\sqrt{7}-\sqrt{3}}=$
6. $\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=$

الدرس الثاني

تحليل كثير الحدود

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. التحليل بإخراج العامل المشترك الأعلى.
2. التحليل بالتجميع.
3. التحليل باستخدام المتطابقات التربيعية.
4. التحليل بالطريقة المباشرة.

أولاً: التحليل بإخراج العامل المشترك الأعلى

تذكّر

العامل (القاسم) المشترك لعددين أوأكثر:

مثال

عوامل 16 هي (16, 8, 4, 2, 1)

عوامل 24 هي (24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1)

ومنه العامل المشترك الأكبر للعددين (24, 16) = 8

نشاط

العدد الأول	العدد الثاني	العدد الثالث	العامل المشترك الأكبر
9	3	12	3
21	28	35	7
12	15	18	......
18	36	24	......
7	8	5	......

ملاحظة

إذا لم يوجد عامل مشترك بين عددين فالعامل المشترك الأكبر هو 1

الحدّ الأول	الحدّ الثاني	الحدّ الثالث	العامل المشترك الأكبر
x^2y^3	xy^5	x^3y^3	xy^3
x^2y^3z	x^2yz^3	x^5y^2	x^2y
xy	xz	yz	1
x^3y	x^5	x^7y	......
a^2b^3c	ab^2c	a^2bc	......

تعلّم

العامل المشترك الأعلى لعدّة حدود جبرية: هو حاصل ضرب العامل المشترك الأكبر للمعاملات العددية في قوى المتغيرات المشتركة بأصغر أس مشترك

أمثلة

الحدّ الأول	الحدّ الثاني	الحدّ الثالث	العامل المشترك الأكبر
$12x^2y^3$	$15xy^5$	$3x^2y^3$	$3xy^3$
$30x^2y^3z$	$18x^2yz^3$	$12x^5y^2$	$6x^2y$
$21xy$	$7xz$	$28x^2yz$	......
$5x^3y$	$15x^5$	$25x^7y$	......
$9a^2b^3c$	$3ab^2c$	$12a^2bc$	......

مثال

$$(15x^2y^3z + 18x^3y^2z^3) \div 3x^2y^2z = 5y + 6xz$$

تعلّم

لتحليل كثير الحدود بإخراج العامل المشترك الأعلى:

1. نخرج العامل المشترك ونكتبه بعد إشارة المساواة
2. نقسم كلاً من الحدود الجبرية من كثير الحدود المعطى على العامل المشترك على أن نضع الناتج داخل قوسين صغيرين

تتم عملية القسمة على مرحلتين: 1. نقسّم الأعداد

2. نقسّم الأحرف (وذلك بتطبيق خواص القوى)

أمثلة

1. $5x^2 + 10x = \underbrace{5x}_{\text{العامل المشترك الأعلى}}\underbrace{(x+2)}_{\text{نواتج القسمة}}$

2. $16x^2y + 8x^3z - 40xz = 8x(2xy + x^2z - 5z)$

3. $15y + 5 = 5(3y + 1)$

4. $5x(x+1) - 3(x+1) = (x+1)(5x-3)$ حيث القوس $(x+1)$ هوالعامل المشترك الأعلى

تدريب

حلل ما يأتي بإخراج العامل المشترك الأكبر:

1. $8x^2y^5 - 12xy^3 =$

2. $7x^2 + 14x =$

3. $3x^3y + 6xy^2 - 9x^2y^2 =$

4. $18x^2yz - 15y^2z - 9x^2y^3z =$

5. $25x^2y - 15y =$

6. $20a^3b^2 - 12a^2b + 5ab^2 =$

7. $(x+1)(x-3) + 2(x+1) =$

8. $(3a+2)^2 + (4a+1)(3a+2) =$

ثانياً: التحليل بالتجميع إلى فئات

ملاحظة

عند عدم وجود عامل مشترك لجميع الحدود نقوم بما يلي:

1. نجمع الحدود التي تحوي عاملاً مشتركاً في فئات
2. نخرج العامل المشترك من كل فئة على حدة
3. يظهر عامل مشترك جديد (قوس) نخرجه خارج قوسين

أمثلة

حلل ما يلي:

① $3ax + 4b + 4a + 3bx =$

$$\underbrace{(3a\,x + 3\,bx)}_{\text{فئة أولى}} + \underbrace{(4a + 4b)}_{\text{فئة ثانية}} = 3x(a + b) + 4(a + b) = \underbrace{(a + b)}_{\text{عامل مشترك}}(3x + 4)$$

② $y^3 + 2y^2 + y + 2 = y^2(y + 2) + y + 2$

$= (y + 2)\,(y^2 + 1)$

تدريب

حلل ما يأتي بالتجميع إلى فئات:

① $x^2 + 2x + 4x + 8 =$

② $x^3 - x^2 + 1 - x =$

③ $2x^3 + xy - 2x^2 - y =$

ثالثاً: التحليل بالطريقة المباشرة

تعلم

كانت الأعداد الحقيقية x, a, b فإن:

تحليل

$(x2 + (a + b) = (x + a)\ (x + b$

مثال

لتحليل كثير الحدود:

- نفتح قوسين $x^2 - 3x - 18 = (x + ...)(x + ...)$
- ثم نبحث عن عددين جداؤهما (-18) ومجموعهما (-3) وهما: العددان: -6، $+3$
- نضع العددين داخل الأقواس، فيكون ناتج التحليل: $x^2 - 3x - 18 = (x + 3)(x - 6)$

أمثلة

1. (عددان جداؤهما $+6$ ومجموعهما -5 وهما -2 و-3)

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

2.

$$3x^3 - 18x^2 - 21x = 3x\,(x^2 - 6x - 7) = 3x(x - 7)(x + 1)$$

عامل مشترك

ملاحظة

لا يمكن استخدام طريقة التحليل المباشر إلا إذا كانت أمثال x^2 تساوي 1

تدريب

حل ما يأتي بالطريقة المباشرة:

1. $x^2 + 7x + 10 =$
2. $2x^2 + 4x - 30 =$
3. $x^2 + 8x + 15 =$
4. $x^2 - x - 20 =$

رابعاً: التحليل بالمتطابقات التربيعية

أولاً: باستخدام المتطابقة: $x^2 - a^2$

أمثلة محلولة

1. $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$
2. $9x^2 - 49 = (3x+7)(3x-7)$
3. $2x^2 + 1 = (\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$
4. $x^4 - 16 = (x^2+4)(x^2-4) = (x^4+4)(x+2)(x-2)$

متطابقة

تمرين

حلل مايلي:

1. $x^2 - 5 =$
2. $x^2 - 9 =$
3. $x^2 - 25 =$
4. $x^4 - 4x^2 =$
5. $(x+3)x^2 - 9(x+3) =$
6. $81 - x^2 =$

ثانياً: باستخدام المتطابقتين: $(x-a)^2$ ،$(x+a)^2$

مثال محلول

$$4x^2 + 12x + 9 =$$

نجذر الحدّ الأول ونجذر الحدّ الأخير $2x$ 3

ثم نتحقق من أنّ الحدّ الأوسط هو جداء الأول في الثاني أي: $2 \times 2x \times 3 = 12x$

ومنه ناتج التحليل: $4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$

الإشارة هي إشارة الحدّ الأوسط

مثال محلول

$$9x^2-24x+16=(3x-4)^2$$

الإشارة هي إشارة الحدّ الأوسط

مثال محلول

$$4x^2-9x+25=$$

$$2x \qquad 5$$

نلاحظ أنّ الحدّ الأوسط لايساوي $2\times 2\ x\times 5$ ومنه لا نستطيع التحليل باستخدام المتطابقات

تمرين

حلل مايلي:

1. $x^2-6\ x+9=$
2. $25x^2-20x+4=$
3. $16x^2+8x+1=$
4. $4-24x+36x^2=$
5. $3x^2y-18xy+27y=$

ملاحظة (أخرج عامل مشترك ثم أكمل التحليل)

تدريب

حلل كثيرات الحدود الآتية إلى أكبر عدد ممكن من الحدود:

1. x^2+6x+9
2. x^3-x
3. $(x+1)x^2-(x+1)$
4. $2x^3-12x^2+18x$
5. $x^2-\frac{1}{4}$
6. $4-a^2$
7. x^4-16
8. x^2-3

إرشاد للحل

يمكن استخدام أكثر من طريقة عند تحليل كثير حدود

الدرس الثالث

المعادلات في $\mathbb{R}$

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. حلّ المعادلات في $\mathbb{R}$
2. حلّ المتراجحات في $\mathbb{R}$

أولاً: حلّ المعادلات في $\mathbb{R}$

تذكّر

المعادلة: هي كلّ مساواة تحوي مجهولاً أوأكثر.

حلّ المعادلة (جذر المعادلة): هو قيمة المجهول التي تجعل المساواة صحيحة.

سوف ندرس المعادلات ذات مجهول واحد فقط.

أمثلة

$8x+5=7$	معادلة بمجهول واحد
$16x^2+8x+1=0$	معادلة بمجهول واحد ومن الدرجة الثانية.
$9x+y=5$	معادلة بمجهولين.

أولاً: المعادلة الخطيّة بمجهول واحد

وهي كلّ معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة لمجاهيلها

أمثلة

$8\ x+5=0$	معادلة خطية بمجهول واحد
$3x+5=x-4$	معادلة خطية بمجهول واحد
بينما المعادلة $x^2+5x=3$	معادلة من الدرجة الثانية بمجهول فهي ليست خطية

خطوات حلّ المعادلة الخطية:

1. نفك الأقواس إن وجدت.
2. ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى طرف آخر.
3. نجمع الحدود المتشابهة
4. نقسم طرفي المعادلة على أمثال المجهول

مثال محلول

حل المعادلة التالية:

$3(x-1)=5-x$ نفك الأقواس

$3x-3=5-x$

$3x+x=5+3$

$4x=8$

$\frac{4x}{4}=\frac{8}{4}$

$x=2$ حلّ المعادلة (جذر المعادلة)

تدريب

حلّ كلاً من المعادلات التالية:

1. $3x-7=3$
2. $5x-19=2x-1$
3. $3x(x-4)=x(2x-8)+12$

مثال محلول 1

معادلة تحوي كسوراً

$\frac{x}{3}+2=\frac{5x}{2}-\frac{4}{6}$ نوّحد المقامات ثم نحذفها

$2x+6=15x-4$

$2x-15x=-6-4$

$-13x=-10$

$x=\frac{-10}{-13}=\frac{10}{13}$

مثال محلول 2

معادلة تحوي جذوراً

أوجد حل المعادلة $\sqrt{3}x-2=x+4$ في $\mathbb{R}$:

$\sqrt{3}x-2=x+4$

$$\sqrt{3}x - x = 4 + 2$$

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)x = 6$$

ويمكن تبسيطه $x = \dfrac{6}{\sqrt{3} - 1}$

$$x = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$$

تدريب

حل في $\mathbb{R}$ كلاً من المعادلات الآتية:

1. $\sqrt{3}\left(x+3\right) = -x+2$
2. $\sqrt{5}x + 2 = x + 2\sqrt{5}$

ثانياً: المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد

وهي كلّ معادلة من الشكل: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية

أمثلة

1. $3x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $5x^2 + 17x = 2$
3. $4x^2 = 2$

1. الحلّ بطريقة إخراج العامل المشترك

مثال

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

إما $3x = 0$,ومنه: $x = 0$

أو $x - 2 = 0$ ومنه: $x = 2$

حاول أن تحلّ

أوجد في $\mathbb{R}$ حل كلاً من المعادلات الآتية:

1. $16x^2 - 8x = 0$
2. $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^3 = 0$
3. $7x^4 - 2x^2 = 0$
4. $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$
5. $9x^2 = 30x$

2. الحل بطريقة متطابقة فرق مربعي حدّين:

مثال

لتكن المعادلة: $4x^2 - 16 = 0$

$(2x+4)(2x-4) = 0$

إما $2x - 4 = 0$, ومنه: $x = 2$

أو $2x + 4 = 0$ ومنه: $x = -2$

3. الحل بطريقة التحليل المباشر:

مثال

لتكن المعادلة: $x^2 + 8x + 12 = 0$

$(x+6)(x+2) = 0$

إما $x + 6 = 0$, ومنه: $x = -6$

أو $x + 2 = 0$ ومنه: $x = -2$

مثال 2

لتكن المعادلة: $3x^2 + 24x + 36 = 0$ نقسّم طرفي المعادلة على 3

$x^2 + 8x + 12 = 0$

ثم نكمل الحلّ $(x + \ldots)(x + \ldots) = 0$

4. الحلّ بطريقة المتطابقات التربيعية:

مثال 1 لتكن المعادلة: $4x^2 + 12x + 9 = 0$

نلاحظ أنّ الطرف الأيسر هوالمتطابقة $(2x+3)^2$

ومنه: $(2x+3)^2 = 0$

$2x+3 = 0$

نجذر الطرفين:

ومنه: $x = \frac{-3}{2}$

مثال 2

لتكن المعادلة: $25x^2 - 10x = -1$

ومنه: $25x^2 - 10x + 1 = 0$

نلاحظ أنّ الطرف الأيسر هوالمتطابقة $(5x-1)^2$

ومنه: $(5x-1)^2 = 0$

نجذر الطرفين: $5x - 1 = 0$

ومنه: $x = \frac{1}{5}$ حلّ المعادلة

تدريبات

1. حلّ المعادلات التالية:

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. $2x^2 - 26x + 60 = 0$
3. $x^2 = -10x - 24$
4. $81x^2 = 5$

2. أوجد مجموعة حُلول كلّ من المعادلات الآتية في $\mathbb{R}$.

1. $3x^2 - 81 = 0$
2. $5x^2 - 14 = 231$
3. $(3x-1)(x+5) = 14x + 22$
4. $9x^2 = 25$
5. $x^2 - 13x + 42 = 0$

6 $x^2 + 10x + 24 = 0$

7 $x^2 - x - 110 = 0$

حلّ المسائل باستخدام المعادلات: (المسائل الكلامية)

ملاحظات هامة

1. كلّ مسألة تقسم إلى جملتين جملة الفرض وجملة المعادلة.
2. جملة الفرض نحدّد من خلالها نوع المجاهيل والعلاقة بينها.
3. جملة المعادلة نشكل من خلالها المعادلة التي بحلّها تحلّ المسألة.
4. يجب مقارنة الحلّ مع معقولية المسألة.

لحلّ المسألة يلزمنا الربط بين العبارة والتعبير عنها بالرّموز من خلال الجدول التالي:

العبارة	التعبير بالرّموز
العدد	x
العدد مضافاً إليه 1	$x + 1$
مربع العدد	x^2
مربع العدد مطروحاً منه 2	$x^2 - 2$
ضعف العدد	$2x$

مثال محلول 1

عددان طبيعيان أحدهما يزيد على الآخر بـ 3 وجداؤهما 130

جملة الفرض: عددان طبيعيان أحدهما يزيد على الآخر بـ 3

جملة المعادلة: وجداؤهما 130

الحل

من جملة الفرض: نفرض العدد الأول x ونفرض العدد الثاني $x + 3$

ومن جملة المعادلة: نكتب: العدد الأول × العدد الثاني = 130

$$x(x+3) = 130$$

$$x^2 + 3x = 130$$

$$x^2 + 3x - 130 = 0$$

بالتحليل المباشر نجد: $(x-10)(x+3) = 0$

ومنه للمعادلة حلان: مرفوض $x = -3$

مقبول $x = +10$

ومنه العدد الأول 10، والعدد الثاني: $x + 3 = 10 + 3 = 13$

مثال محلول 2

أوجد عددين الفرق بينهما 3 والفرق بين مربعيهما 21 .

الحل

نفترض العدد الأول x فيكون الثاني $x - 3$

ومربع العدد الأول x^2 فيكون مربع الثاني $(x-3)2$

الفرق بين مربعيهما يساوي 21 أي:

$$x^2 - (x-3)2 = 21$$

$$x^2 - (x^2 - 6x + 9) = 21$$

$$x^2 - x^2 + 6x - 9 = 21$$

$$6x - 9 = 21$$

$$6x = 30$$

بالتالي $x = 5$ هو العدد الأول، فيكون العدد الثاني $5 - 3 = 2$

مسائل

1. أوجد عددين مجموعهما 13 ومجموع مربعيهما 89 .
2. أوجد عددين طبيعيين أحدهما يزيد على الآخر بـ 3، ومربع الصغير يزيد على ضعفي الكبير بـ 57.
3. مستطيل يزيد طوله على عرضه بـ 7 وطول قطره 13 أوجد بعديه.
4. عدد طبيعي إذا أضيف إلى مربعه 4 أمثاله كان الناتج 77 .
5. أوجد عددين طبيعيين متتاليين الفرق بين مربعيهما 17.

حلّ كلاً من المسألتين الآتيتين

1. إذا زاد طول ضلع مُربع بمقدار 2 m، زادت مساحة المنطقة التي يعيّنها $24\ m^2$، أوجد طول ضلع المُربع.
2. إذا نقص طول ضلع مُربع بمقدار 2 m، نقصت مساحة المنطقة التي يعيّنها $56\ m^2$، أوجد طول ضلع المُربع.

ثانياً: المتراجحات

تذكّر

خواص المتراجحات

1. لا تتغير جهة المتراجحة في الحالات التالية:

1. إذا أضفنا إلى طرفيها المقدار نفسه.

مثال $5 < 9$ عندها: $5 + 2 < 9 + 2$ لأنّ: $7 < 11$

2. إذا ضربنا طرفيها بعدد موجب.

مثال $5 < 9$ عندها: $3 \times 5 < 3 \times 9$ لأنّ: $15 < 27$

3. إذا قسّمنا طرفيها على عدد موجب.

مثال $4 > -12$ عندها: $2 \div 4 > 2 \div -12$ لأنّ: $2 > -6$

2. تتغير جهة المتراجحة في الحالات التالية:

1. إذا ضربنا طرفيها بعدد سالب.

مثال $4 > -12$ عندها: $(-5) \times 4 < (-5) \times -12$ لأنّ: $-20 < +60$

2. إذا قسّمنا طرفيها على عدد سالب.

مثال $4 > -12$ عندها: $(-2) \div 4 < (-2) \div -12$ لأنّ: $-2 < +6$

أمثلة

1. $2x < 8$ فيكون $x < 4$
2. $-2x < 8$ فيكون $x < -4$

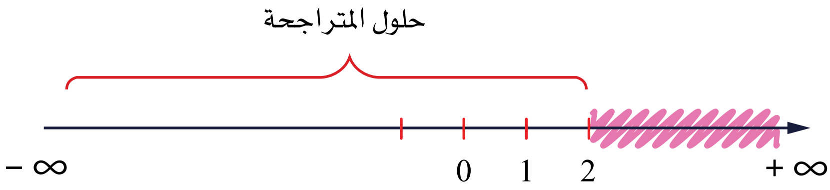
ملاحظة

إذا نُقل حدّاً من طرف إلى آخر نغير إشارة الحد المنقول .

حلّ المتراجحة: نعبر عن حلّ المتراجحة بمجال عددي وهو يمثل جزءاً من مستقيم الأعداد

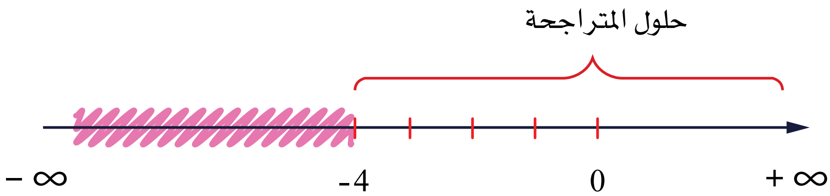
أمثلة

1) $x < 2$



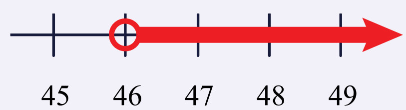
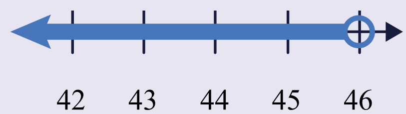
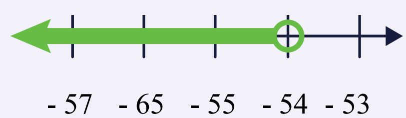
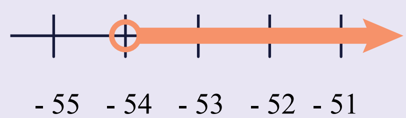
مجموعة حلول المتراجحة: $]-\infty ,2[$

2) $x \geq -4$



مجموعة حلول المتراجحة: $[-4 ,+\infty[$

أمثلة

الرمز	العبارة اللفظية	الرسم
$x > 46$	x أصغر تماماً من 46	
$x < 46$	x أكبر تماماً من 46	
$x \leq -54$	x أصغر (أصغر أويساوي) من -54	
$x \geq -54$	x أكبر (أكبر أويساوي) من -54	

ملاحظة نُسمّي كلّ مجموعة من المجموعات الواردة في الجدول الآتي مجالاً وترمز:

مجموعة الأعداد الحقيقة الأصغر من a	$]-\infty, a[$
مجموعة الأعداد الحقيقة الأصغر من أويساوي a	$]-\infty, a]$
مجموعة الأعداد الحقيقة الأكبر من a	$]a, +\infty[$
مجموعة الأعداد الحقيقة الأكبر من أويساوي a	$[a, +\infty[$
مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$

مثال محلول

حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5} \leq \frac{1}{6}x$

الحل

لإصلاح المتراجحة نضرب طرفي المتراجحة بالمضاعف المشترك الأصغر للأعداد 6 ,5 ,3 هو 30

$$30\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}\right) \leq 30\left(\frac{1}{6}x\right)$$

$$30 \times \frac{1}{3}x - 30 \times \frac{1}{5} \leq 30 \times \frac{1}{6}x$$

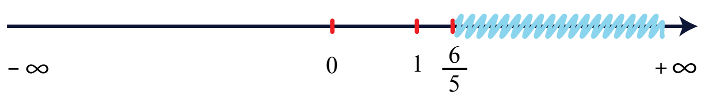
$$10x - 6 \leq 5x$$

$$10x - 5x \leq 6$$

ومنه $5x \leq 6$ بالتالي $x \leq \frac{6}{5}$

حلّ هذه المتراجحة هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أوتساوي $\frac{6}{5}$ ونُرمز إليها بـ $]-\infty, \frac{6}{5}]$

ونمثّل هذا المجال على خط الأعداد كما في الشكل الآتي:



تدريب

أوجد مجموعة حلول المتراجحات التالية مع تمثيل الحلول على مستقيم الأعداد:

1. $2x - 5 \geq 5x + 10$

2. $3(x - 2) < x + 2$

3. $2x - 5 \geq 5x + 10$

4. $\frac{1}{8}x - 3 \leq 5$

5. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} < \frac{x}{3}$

اختبار وحدة لغة الجبر

السؤال الأول: اختر الإجابة الصّحيحة فيما يأتي:

1 حجم المكعب الذي طول حرفه $2x$:

$4x^2$	$4x^3$	$8x^2$	$8x^3$

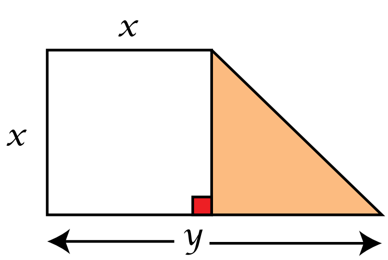
2 منشور $-2x(x-3)$ هو:

$+2x^2-6x$	$-2x^2+6x$	$-2x^2-6x$	$-2x^2+5x$

3 منشور $(3-2x)(-5x)$ هو:

$-15x+10x^2$	$15x-10x^2$	$-15x-10x^2$	$-8x+10x^2$

4 مساحة المنطقة الملوّنة في الشّكل المجاور:



$\frac{1}{2}(xy-x^2)$	$\frac{x}{2}(x+y)$
$\frac{1}{2}(x-y)x$	$\frac{1}{2}(x-y)y$

5 إنّ $x^2-8x+15$ يساوي:

$(x-5)(x-3)$	$(x-5)(x+3)$	$(x+5)(x-3)$	$(x+15)(x+1)$

6 إنّ $2x^2-12x+10$ يساوي:

$(x-5)(x-1)$	$2(x-5)(x+1)$	$2(x-5)(x-1)$	$(2x-1)(x-10)$

السؤال الثاني: أوجد ناتج $\frac{4x^3-6x^2+20x}{20x}$ بأبسط صورة.

السؤال الثالث: انشر: $A=\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2$

السؤال الرابع: حلّل: x^3-x^2+1-x

السؤال الخامس: حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^2=0$

السؤال السادس: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\leq x+1$ ومثّل حلولها على خط الأعداد واكتبه على شكل مجال.

انتهت الأسئلة

الوحدة السادسة: المعادلات الخطية

الدرس الأول

المعادلة الخطيّة

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. مفهوم المعادلة الخطيّة.
2. تحديد ثوابت المعادلة.

تعلم

المعادلة الخطيّة بمجهولين: هي معادلة من الشكل:

$a\,x + b\,y = c$ حيث: $a, b \in \mathbb{R}$ و $(a, b) \neq (0\ ,0)$

نشاط

أكمل الجدول التالي:

المعادلة الخطيّة	a	b	c
$2x + 4y = 1$	2	4	1
$-3x + 3y = 4$			
$-2x + 4y = 0$			
$4x = 5$			
$y - 1 = 0$			

تدريب

عيّن الأعداد a, b, c في كلّ من المعادلات الخطيّة الآتية:

المعادلة الخطيّة	a	b	c
$3x = 5$	3	0	5
$\sqrt{2}y = 3$			
$x - y = 0$			

المعادلة الخطيّة	a	b	c
$2x + 5y = -3$	2	5	-3
$3y - x6 = 0$			
$1 - 4x = \sqrt{2}y$			

تدريب

1. ضع إشارة ✓ في ☐ أمامَ كلّ معادلة خطيّة ممّا يأتي:

1	$x+\frac{1}{4}y=4$ ☐	5	$2x+3y=0$ ☐
2	$xy=4$ ☐	6	$y=6+2x$ ☐
3	$8x+2y=56$ ☐	7	$5x^2-4y=1$ ☐
4	$y=\frac{1}{2}x-3$ ☐	8	$3x-2=0$ ☐

2. يزيد عمر سعيد 6 سنوات على ضعفي عُمر أخته سلمى، فإذا افترضنا عمر سعيد x وعمر سلمى y
ضع إشارة ✓ أمام المعادلة التي تمثّل العلاقة بين عمريهما:

1	$x=2y+6$	3	$x+2y=6$
2	$x-2y^2=6$	4	$x-y^2=6$

هل العلاقة بين العمرين معادلة خطيّة؟ علل

تعلم

حلّ المعادلة الخطيّة بمجهولين:

الثنائيات من R^2 التي تجعل المعادلة محققة تُسمّى حلولاً لها.

لإيجاد حلّ للمعادلة الخطيّة نعطي لـ x أو y قيمة عددية،

ثُمَّ نحسب القيمة الموافقة للآخر.

مثال

لتكن المعادلة الخطيّة: $x + 2y = 3$

إنّ الثنائية $(1, 1)$ حلّ للمعادلة لأنّ إحداثيتيها تحققان المعادلة

بالتعويض نجد $1 + 2\,(1) = 3$

$1 + 2 = 3$

$3 = 3$ **محققة**

ولكن الثنائية $(1, 2)$ ليست حلاً للمعادلة لأنّ إحداثيتيها لا تحققان المعادلة: نعوّض:

الطرف الأول: $= 1 + 2(2)$

$= 1 + 4$

$= 5$

ومنه: $3 \neq 5$ غير محققة

تدريب

أيّ الثنائيات الآتية حلّ للمعادلة $x - 2\,y = 6$ ؟

1. $(2, 10)$
2. $(8, 1)$
3. $(16, 5)$
4. $(12, 3)$

الدرس الثاني

التمثيل البياني للمعادلة الخطيّة

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

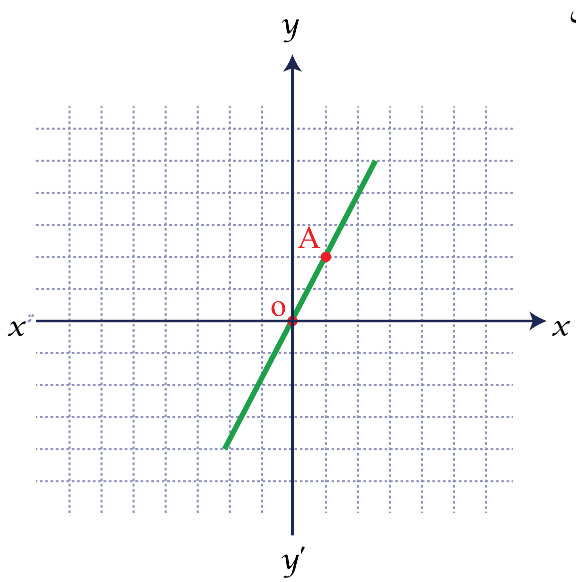
1. المستقيم المار بمبدأ الإحداثيات الذي معادلته: $y = m\,x$
2. مستقيم غير مار بمبدأ الإحداثيات الذي معادلته: $a\,x + b\,y = c$
3. تعيين ميل مستقيم.
4. رسم الخط البياني للمعادلة الخطيّة.

تذكّر

تعلّمت سابقاً التمثيل البياني للمعادلة الخطيّة $y = mx$ ووجدت أنّه مستقيم يمرّ من المبدأ وسميتها معادلته وسميّت العدد m ميله.

مثال محلول

لتكن المعادلة $y = 2x$، عيّن الميل ثم ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة. $y = 2\,x$



الحلّ

المعادلة من الشكل $y = m\,x$ ومنه $m = 2$

لرسم مستقيم نحتاج إلى نقطتين منه:

من أجل $x = 0$ نعوّض في المعادلة

$y = 2\,(0) = 0$ ومنه $O\,(0,\,0)$

من أجل $x = 1$ نعوّض في المعادلة

$y = 2\,(1) = 0$ ومنه $A\,(1,\,2)$

نعيّن النقطتين في المستوي ونصل بينهما نحصل على المستقيم الممثل للمعادلة السابقة.

مثال محلول

لتكن المعادلة $y = -x$، عيّن الميل ثم ارسم ممثل هذه المعادلة.

الحلّ

المعادلة من الشكل $y = \mathrm{m}\, x$ ومنه فإنّ $\mathrm{m} = \ldots$

لرسم مستقيم نحتاج إلى نقطتين منه:

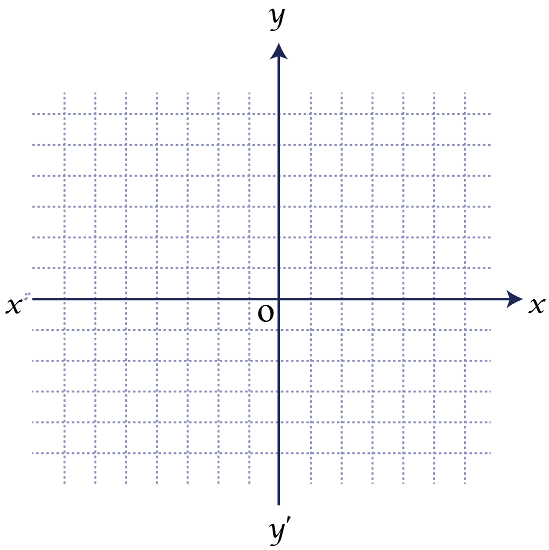
من أجل $x = 0$ نعوّض في المعادلة

$y = \ldots\ (0) = 0$ ومنه $\mathrm{O}\ (0,\ 0)$

من أجل $x = 1$ نعوّض في المعادلة

$y = \ldots\ (1) = -1$ ومنه $\mathrm{A}\ (\ldots,\ \ldots)$

نعيّن النقطتين في المستوي ونصل بينهما فنحصل على المستقيم المثل للمعادلة السابقة.



تعلم

التمثيل البياني للمعادلة الخطيّة $\mathrm{a}\, x + \mathrm{b}\, y = \mathrm{c}$ حيث $\mathrm{b} \neq 0$ في المستوي الإحداثي هو مستقيم ميله $\mathrm{m} = -\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ وتُسمّى معادلة هذا المستقيم .

نشاط

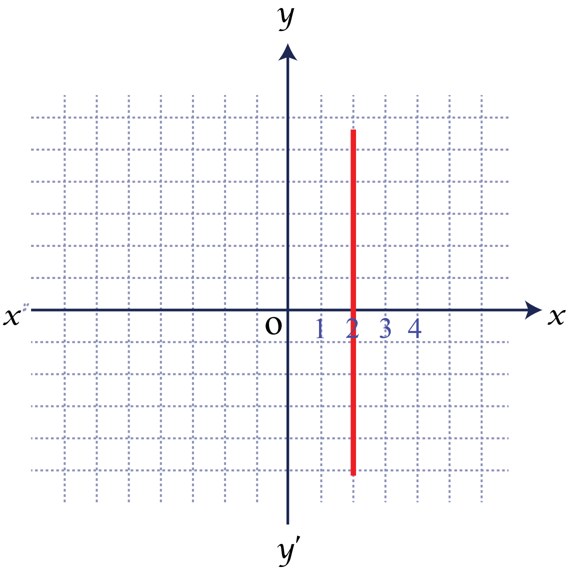
أكمل الجدول التالي:

$\mathrm{m} = -\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$	b	a	المعادلة الخطيّة
$\mathrm{m} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$	4	2	$2\,x + 4y = 1$
			$-3\,x + 3y = 4$
			$-2\,x + 4y = 0$
			$6\,x + 3y = 0$
			$-x + 2y = -1$
			$-x + y = -2$
مستقيم شاقولي ليس له ميل			$4x = 5$
مستقيم أفقي ميله صفر			$y - 1 = 0$

حالات خاصة:

1. الخط البياني لمستقيم معادلته من الشكل: $x = a$:

هو مستقيم يوازي محور التراتيب (عمودي على محور ox أي لايميل على ox)

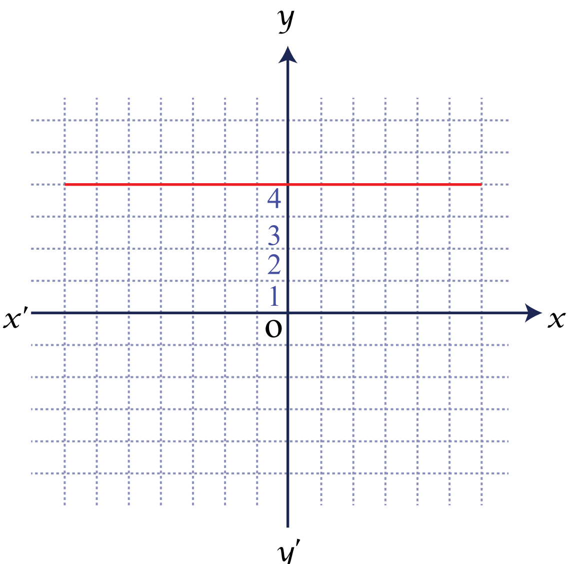


مثال

الخط البياني الممثل للمعادلة $x = 2$ هو مستقيم يوازي محورالتراتيب

2. الخط البياني لمستقيم معادلته من الشكل: $y = a$:

هو مستقيم يوازي محور الفواصل (عمودي على محور oy) وميله صفر



مثال

الخط البياني الممثل للمعادلة $y = 5$ هو مستقيم يوازي محور الفواصل

ملخص	معادلة المستقيم	
	يمر من مبدأ الإحداثيات	لا يمر من مبدأ الإحداثيات
معادلته	$y = mx$	$y = mx + p$
مصطلحات	نسمي m ميل	ونسمي m ميل وp الثابت
	يمرّ بالنقطة $(0 ,0)$	يمرّ بالنقطة $(0, p)$

ملخص	معادلة المستقيم	
	نرمز للمستقيم بحرف من الشكل: d أو Δ في حال وجود أكثر من مستقيم نرفق الرمز برقم مثل d_1, d_2 أو Δ_1, Δ_2	
ملاحظات	نرسم المستقيم في مستوي الإحداثيات بمعرفة نقطتين منه	
	لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الفواصل نعوّض $y = 0$ في معادلة المستقيم وتكون نقطة التقاطع من الشكل $(0, b)$	
	لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور التراتيب نعوّض $x = 0$ في معادلة المستقيم وتكون نقطة التقاطع من الشكل $(a, 0)$	
	أيّ نقطة تقع على المستقيم إحداثيتها تحققان معادلته	
	إذا تساوى ميلا مستقيمين كانا متوازيين	
	إذا توازى مستقيمان كان لهما الميل ذاته	
حالات خاصة	المستقيم الموازي لمحور التراتيب معادلته $x = p$	المستقيم الموازي لمحور الفواصل معادلته $y = p$

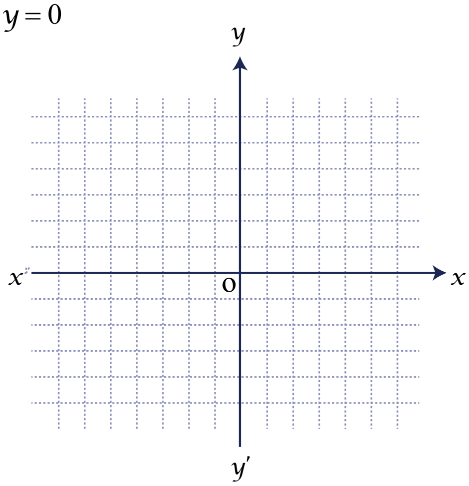
تدريب 1

أيّ من المستقيمات الآتية يمرّ بمبدأ الأحداثيات:

$d_1:\ \sqrt{3}x - \frac{1}{2}y - 7 = 0$

$d_2:\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

$d_3:\ x + 3y = 0$



تدريب 2

لتكن لدينا المعادلة الخطيّة $2x + y = 0$

- اكتب المعادلة بالشكل $y = mx$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة $y = -2x$:

....

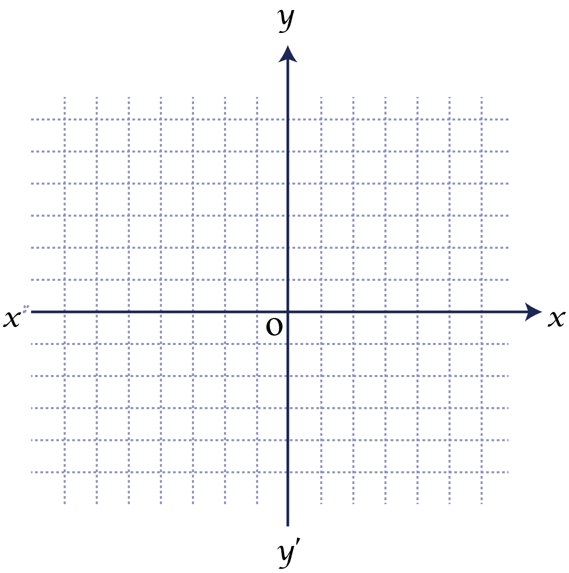
....

....

....

....

مثال محلول



لتكن لدينا المعادلة الخطيّة للمعادلة: $2x + y = 1$

- اكتب المعادلة بالشكل $y = mx + p$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة: $y = -2x + 1$

الحل

المعادلة من الشكل $y = mx + p$ ومنه

فإنّ $m = ...$

لرسم مستقيم نحتاج إلى نقطتين منه:

- من أجل $x = 0$ نعوّض في المعادلة

$y = -2(0) + 1 = +1$

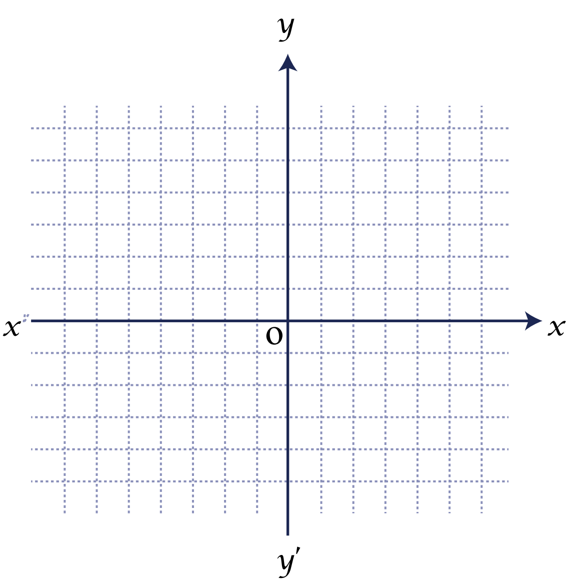
ومنه $A\ (0, +1)$

- من أجل $x = 1$ نعوّض في المعادلة

$y = -2\ (1) + 1 = -1$

ومنه $B\ (1, -1)$

نعيّن النقطتين في المستوي ونصل بينهما نحصل على المستقيم الممثل للمعادلة السابقة



تدريب 1

لتكن لدينا المعادلة الخطيّة $2x + y - 3 = 0$

- اكتب المعادلة بالشكل $y = mx + p$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة السابقة.

....

....

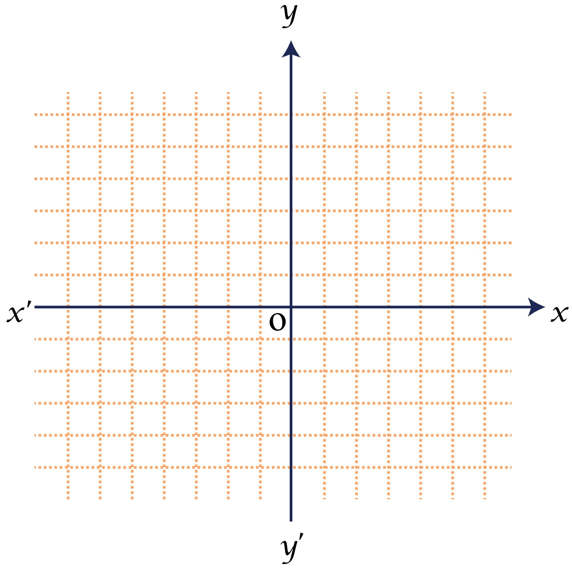
....

....

تدريب 2

لتكن لدينا المعادلة الخطيّة $2x + y = 4$

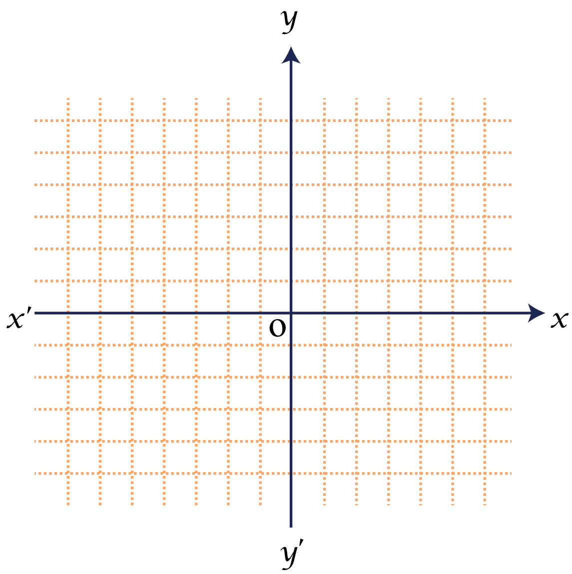
- اكتب المعادلة بالشكل $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة السابقة.



تدريب 3

لتكن لدينا المعادلة الخطيّة $2x + 3y = 6$

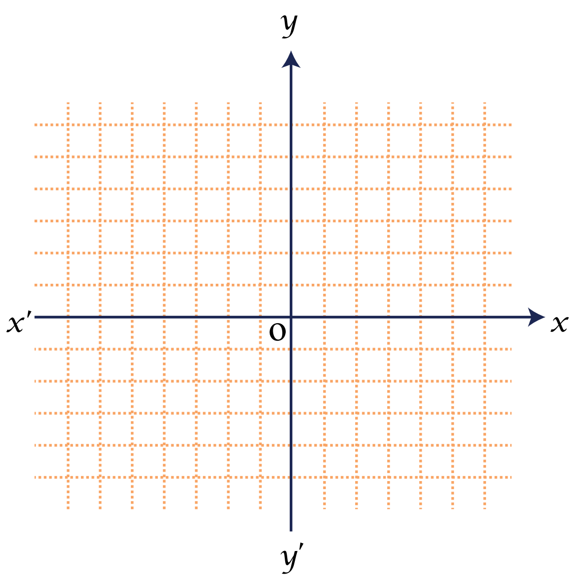
- اكتب المعادلة بالشكل $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل لهذه المعادلة.



تدريب 4

لتكن لدينا المعادلة الخطيّة $3x + 2y = 7$

- اكتب المعادلة بالشكل $y = \mathrm{m}x + \mathrm{p}$ واستنتج الميل
- ارسم الخط البياني الممثل للمعادلة السابقة:



تدريبات

1 المستقيم Δ معادلته $2x + y = 2$ والمطلوب:

أ. أيّ النقط الآتية تنتمي إلى المستقيم Δ: $A\ (0,\ 2),\ B(1,\ 0),\ C(2.5, \sqrt{3})$

ب. ارسم المستقيم Δ ثُمّ عيّن ميله.

ج. اختر الإجابة الصحيحة، مساحة المثلث OAB هي:

$S = \frac{1}{2}$ $\quad$ $S = 1$ $\quad$ $S = 2$

ارشاد للحل

لاحظ أن النقطة C لاتنتمي إلى المستقيم Δ

لأن عند تعويض احداثيتي النقطة في المعادلة نجد:

الطرف الأول: $= 2 \times 2.5\sqrt{3}$

$= 5 + \sqrt{3}$

ومنه: $5 + \sqrt{3} \neq 2$

2 في المعادلة $y = mx + 1$

أ. عيّن قيمة m كي يمرّ الممثل لهذه المعادلة من النقطة $A(-1,\ 2)$.

ب. بفرض $m = -1$ ارسم المستقيم.

ارشاد للحل

نعوض إحداثيتي النقطة A في المعادلة فنحصل على معادلة بمجهول واحد هو m

3 لتكن المعادلة الخطيّة $-2 + by + 3x = 0$

أ. اكتب المعادلة بالشكل: $ax + by = c$ ثم عيّن كلاً من العددين $c,\ a$.

ب. إذا علمّتَ أنّ المستقيم الممثل للمعادلة يمرّ بالنقطة $A(2\ ,4)$ فعين b .

ج. إذا كانت $b = -1$ فأوجد إحداثيات نقطتي تقاطعه مع المحورين الاحداثيين $y'y,\ x'x$ ثُمّ ارسمه

ارشاد للحل

نعوّض إحداثيي النقطة A في المعادلة فنحصل على معادلة بمجهول واحد هو b

الدرس الثالث

الحل المشترك لجملة معادلتين خطيتين جبرياً

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. حلّ جملة معادلتين جبرياً بالتعويض.
2. حلّ جملة معادلتين جبرياً بالجمع.
3. حلّ جملة معادلتين جبرياً بالتساوي.

نشاط

لتكن المعادلتان الخطيتان

1. $x + y = 1$
2. $3x + y = 5$

- بيّن أنّ الثنائية $(1, 0)$ ليست حلاً مشتركاً للمعادلتين.
- بيّن أنّ الثنائية $(2, 1)$ ليست حلاً مشتركاً للمعادلتين.
- بيّن أنّ الثنائية $(-1, 2)$ حلّ مشترك للمعادلتين.

نقبل أنّ هذا الحلّ وحيد.

الحلّ

عوّض عددياَ في المعادلتين

تعلّم

1. نقول عن الثنائي (x, y) إنّها حلّ لمعادلة خطيّة
إذا حققت إحداثياتها المعادلة ونتأكد من ذلك بالتعويض.
2. نقول عن الثنائية (x, y) إنّها حلّ مشترك لجملة معادلتين خطيتين
إذا حققت إحداثياتها كلتا المعادلتين ونتأكد من ذلك بالتعويض في كلتا المعادلتين .

ويمكن ايجاد الحل المشترك لجملة المعادلتين جبرياً بعدّة طرائق منها:

أولاً: حل جملة معادلتين جبرياً بالتعويض

مثال محلول

لتكن المعادلتان الخطيتان:

1. $x + y = 1$
2. $3x + y = 5$

أوجد الحلّ المشترك بطريقة التعويض

الحل

لإيجاد الحلّ المشترك للمعادلتين:

1. $x + y = 1$
2. $3x + y = 5$

نتبع الخطوات الآتية:

- من المعادلة (1) نحسب x بدلالة y فنجد $x = 1 - y$ (وتُسمّى معادلة الحُلول).
- نعوّض قيمة x في المعادلة (2) فنجد: $3(1 - y) + y = 5$

  $3 - 3y + 3y = 5$ ومنه $-2y = 5 - 3$ أي $y = -1$
- نعوّض في معادلة الحُلول $x = 1 - (-1) = 2$
- يكون الحلّ المشترك للمعادلتين في $\mathbb{R}^2$ هو $x = 2,\ y = -1$
- أوالحلّ المشترك للمعادلتين في $\mathbb{R}^2$ هو الثنائية $(2 ,-1)$

تدريب

أوجد الحلّ المشترك للمعادلتين الخطيتين الآتيتين في $\mathbb{R}^2$

1. $x - 2y = 7$
2. $2x + y = 4$

ثانياً: حلّ جملة معادلتين جبرياً بالجمع

مثال محلول

أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحلّ المشترك للمعادلتين الخطيتين الآتيتين (بطريقة الجمع):

1. $x + y = 13$
2. $2x + y = 5$

الحلّ

نضرب طرفي المعادلة (1) بـ(-1)فنحصل على المعادلة المكافئة $3)\ -x - y = 13$

نجمع المعادلتين (1) و(3)

نحصل على $x = -8$ نعوّض في (2) فنجد: $y = 5 + -16$ ومنه $y = 21$

فيكون الحلّ المشترك للمعادلتين الثنائية $(21,\ -8)$.

تدريب

أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحلّ المشترك للمعادلتين الخطيتين الآتيتين (بطريقة الجمع):

1. $x - 2y = 5$
2. $3x + 2y = 11$

ثالثاً: حلّ جملة معادلتين جبرياً بالتساوي

مثال محلول

أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحلّ المشترك للمعادلتين الخطيتين الآتيتين (بطريقة التساوي):

1. $x + 4y = -1$
2. $x - y = 1$

الحلّ

من المعادلة (1) نجد $x = -1 - 4y$

من المعادلة (2) نجد $x = 1 + y$

بالمقارنة نجد: $1 + y = -1 - 4y$ ومنه $y = \frac{-2}{5}$

نعوّض في المعادلة (4) نجد: $x = \frac{3}{5}$ ويكون الحلّ المشترك للمعادلتين الثنائية $\left(\frac{3}{5}, \frac{-2}{5}\right)$

تدريب

أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحل المشترك للمعادلتين الخطيتين الآتيتين (بطريقة التساوي):

$$\begin{cases} ①\ 2x + y - 3.5 = 0 \\ ②\ x - y = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

تدريبات

1. أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحلّ المشترك لكلّ جملة معادلتين خطيتين ممّا يأتي (بالطريقة التي تراها مناسبة):

$$\begin{cases} ①\ 3x + y = 5 \\ ②\ 2x - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ①\ 5x - y = 1 \\ ②\ 2x - y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} ①\ 3y - \dfrac{1}{2}x = 6 \\ ②\ x + 4 = 2y \end{cases}$$

2. هل للمعادلتين الخطيتين الآتيتين حلّ مشترك في $\mathbb{R}^2$ ؟

$①\ 2x + y = 5$ وفسّر النتيجة هندسياً .

$②\ 4x + 2y = 4$

3. تحقق أنّ للمعادلتين الخطيتين الآتيتين عدداً غير منتهٍ من الحلول المشتركة في $\mathbb{R}^2$.

$①\ x - 2y = 3$ وفسّر النتيجة هندسياً .

$②\ 2x - 4y = 6$

الدرس الرابع

الحلّ المشترك لجملة معادلتين خطيتين بيانياً

تعلّم

لحل جملة معادليتن خطيتين بيانياً:

أ. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الأولى

ب. نرسم المستقيم الممثل للمعادلة الثانية في المستوي نفسه وهنا نميّز حالتين:

1. يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة تمثل إحداثيتها حلاً وحيداً لجملة المعادلتين.
2. المستقيمان متوازيان: جملة المعادلتين مستحيلة الحل.
3. المستقيمان منطبقان: لجملة المعادلتين عدد لا نهائي من الحلول.

مثال محلول

حلّ جملة المعادلتين بيانياً:

(1) $x + 2y = 6$

(2) $2x - y = 2$

الحلّ

- لرسم الخط البياني الممثل للمعادلة (1) نحتاج إلى نقطتين منه:

من أجل $x = 0$ نعوّض في المعادلة

$0 + 2\,y = 6$ وبالتالي: $y = \frac{6}{2} = 3$

ومنه $A\ (0,\ +3)$

من أجل $y = 0$ نعوّض في المعادلة

$x + 2(0) = 6$ وبالتالي: $x = 6$

ومنه $B\ (6,\ 0)$

انظر الجدول:

x	y	$(x,\ y)$
6	0	A (6, 0)
0	3	B (0, 3)

- لرسم الخط البياني الممثل للمعادلة (2) نحتاج إلى نقطتين منه:

من أجل $x = 0$ نعوّض في المعادلة

$2(0) - y = 2$ وبالتالي: $y = \frac{2}{-1} = -2$

ومنه $C\,(0,\,-2)$

من أجل $y = 0$ نعوّض في المعادلة

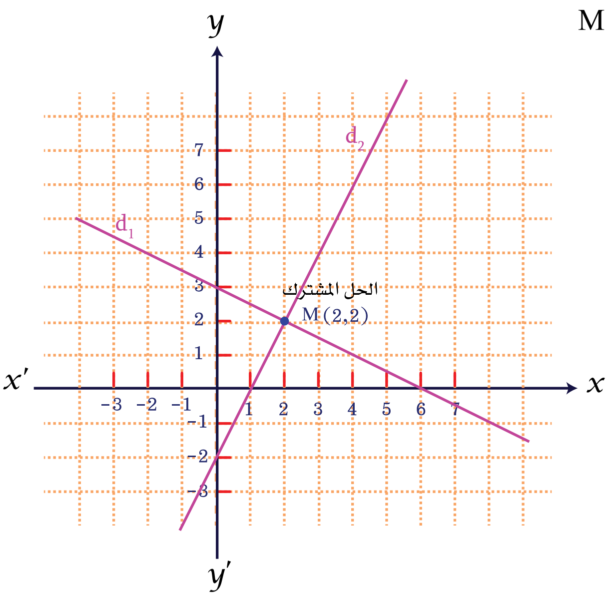
$2x - 0 = 2$ وبالتالي: $x = \frac{2}{2} = 1$

ومنه $D\,(1,\,0)$

x	y	$(x,\, y)$
0	-2	$C\,(0,\,-2)$
1	0	$D\,(1,\,0)$

- لاحظ أنّ المستقيمين تقاطعا في النقطة $M\,(2,\,2)$

أي أنّ: الحلّ البياني لجملة المعادلتين هو نقطة التقاطع M



تدريب 1

- أوجد ميل كلّ من المستقيمين الممثلين بالمعادلتين:

1. $y + 2x = 5$
2. $x - 2 = 0$

- ارسم الخط البياني الممثل لكلّ معادلة منهما في مستوي الإحداثيات

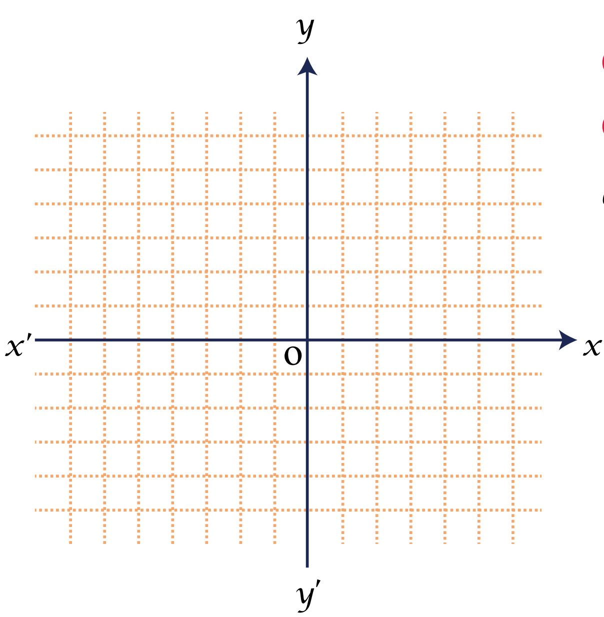
....

....

....

....

....



تدريب 2

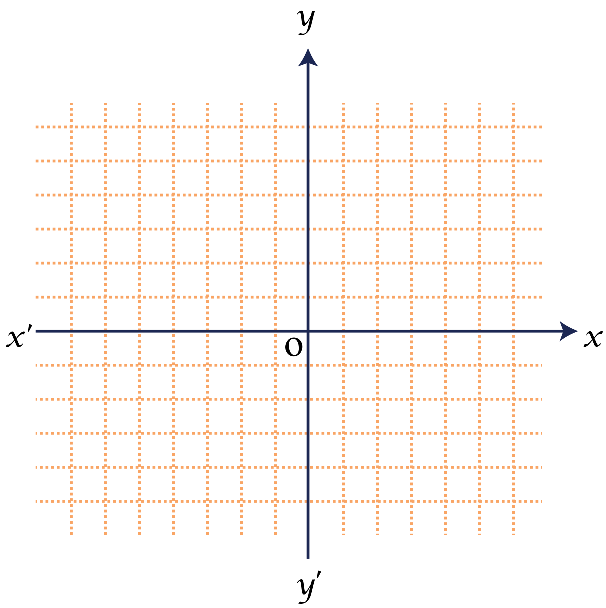
حلّ جملة المعادلتين بيانياً:

1. $x + y = 1$
2. $y = -x + 2$

ماذا تستنتج؟

الحلّ

....
....
....
....
....
....



تدريب 3

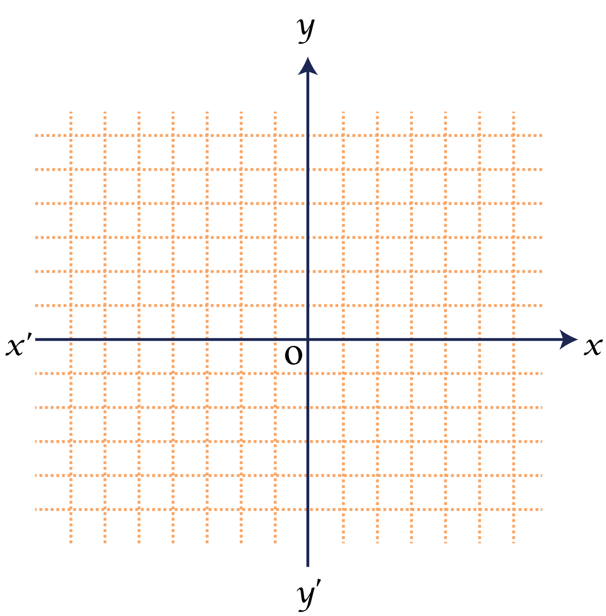
حلّ جملة المعادلتين بيانياً:

1. $x - y = 2$
2. $2x - 2y = 4$

ماذا تستنتج؟

الحلّ

....
....
....
....
....
....



تدريبات

1. بأستخدام m و p في المعادلة $y = mx + p$ علّل ما يأتي (من دون حلّ جملة المعادلتين)

أ. للمعادلتين

$$\begin{cases} ① \; y = 2x + 3 \\ ② \; y = 3x + 3 \end{cases}$$ حلّ مشترك وحيد .

ب. لا توجد حُلول مشتركة للمعادلتين

$$\begin{cases} ① \; y = 2x + 1 \\ ② \; y = 2x + 5 \end{cases}$$

ج. للمعادلتين

$$\begin{cases} ① \; y = \sqrt{8}x + 3 \\ ② \; y = 2\sqrt{2} + |-3| \end{cases}$$ عددٌ غير منتهٍ من الحُلول المشتركة.

إرشاد للحل

في التمارين أ، ب، ج أوجد ميل كلٍّ من المستقيمين

2. أوجد الحلّ المشترك لكلّ جملة من معادلتين ممّا يأتي (بيانياً وجبرياً):

$$\begin{cases} ① \; x - 1 = 0 \\ ② \; y - x + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ① \; y = x \\ ② \; 2x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ① \; 2x + 3y = 5 \\ ② \; x - 2y = -1 \end{cases}$$

3. أوجد في $\mathbb{R}^2$ الحلّ المشترك لكلّ جملة معادلتين خطيتين ممّا يأتي

$$\begin{cases} ① \; 3y + y = 5 \\ ② \; 2x - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ① \; 5x - y = 1 \\ ② \; 2x - y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} ① \; 3y - \frac{1}{2}x = 6 \\ ② \; x + 4 = 2y \end{cases}$$

4. أوجد الحلّ المشتركُ لكلّ جملة معادلتين خطيتين بالطريقة التي تراها مناسبة

1)	$12x - 2y = 0$ $3x + 2y = 25$	3)	$y + \sqrt{3} = \sqrt{27}$ $x - y = \sqrt{75}$	5)	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1$ $y - \sqrt{8} = 0$
2)	$\frac{x+3y}{2} = 2$ $\frac{2x-y}{2} = 3$	4)	$3x - 9 = 0$ $5x + 4y = 2$	6)	$y = 3x + 2$ $x = 1 - 2y$

اختبار وحدة المعادلات الخطية

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصّحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

أ. واحدة فقط من المعادلات الآتية خطيّة:

1. $y = -\frac{1}{x}$
2. $2x - 3 = 5y$
3. $x \, . \, y = 3$
4. $y = \sqrt{x}$

ب. واحدة فقط من الثنائيات الآتية حلّ للمعادلة الخطيّة $y - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

1. $(0,\ 0)$
2. $(0,\ 3.5)$
3. $(-2,\ 2)$
4. $(0,\ 7)$

ج. التمثيل البياني في المستوى الإحداثي للمعادلة الخطيّة $y - x - 1 = 0$ هو:

1. مستقيم يمرّ من النقطة $(0,\ 0)$ O .
2. مستقيم يمرّ من النقطة $(2,\ 1)$.
3. مستقيم يوازي $x'x$.
4. مستقيم يوازي $y'y$.

د. التمثيل البياني للمعادلة $x - 1 = 0$ هو:

1. مستقيم ميله يساوي (1) .
2. مستقيم يوازي $x'x$.
3. مستقيم يوازي $y'y$.
4. مستقيم يمرّ بالنقطة $(0,\ 2)$.

هـ. المثلاّن البيانيان للمعادلتين الآتيتين: $x + y = 4,\ x + y = 2$

1. مستقيمان متقاطعان بالنقطة $(2,\ 2)$.
2. مستقيمان طبوقان .
3. مستقيمان متوازيان تماماً .
4. مستقيمان متقاطعان بالنقطة $(1,\ 1)$.

السؤال الثاني: لتكن المعادلة الخطيّة $3x + by = 6$ وتمثيلها البياني المستقيم Δ والمطلوب:

1. عيّن b كي يمرّ من النقطة A $(0,\ 6)$.
2. بفرض $b = 1$ عين ميل ثُمّ ارسمه في المستوي الإحداثي.
3. نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع $x'\ x$ هي B أوجد إحداثياها ثُم احسب مساحة المثلث OAB .

السؤال الثالث: لتكن المعادلة الخطيّة: $3 + 2y - 3x = 0$ والمطلوب:

1. اكتبها بالشكل $ax + by = c$ وعيّن كلاً من $a,\ b,\ c$.
2. بفرض المستقيم Δ تمثيلها البياني عيّن ميله.
3. ارسم المستقيم Δ.

السؤال الرابع: حل المسألة التالية:

آلتان لصناعة القمصان بلغ إنتاجهما في اليوم الأول (200) قميصاً علماً أنّ الأولى عملت (5) ساعات والثانية عملت (8) ساعات، وبلغ إنتاجهما في اليوم الثاني (208) قمصان. فإذا عملت الأولى (6) ساعات وعملت الثانية (5) ساعات، فكم قميصاً تنتج كلّ منهما في الساعة الواحدة؟

انتهت الأسئلة

الدرس الأول

التابع العددي

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. مفهوم التابع العددي.
2. إيجاد صورة العدد.

مقدمة

التّابعُ منهجٌ حياتيٌّ نلاحظه في مناحي الحياة المختلفة وللتوابعِ العدديّة أنشطة رياضية وتطبيقات مختلفة، ندرسُ منها بعضَ أنواع التّوابع العدديّة، ونتدرّبُ على التمثيل البيانيّ للتّابع العددي ممّا يساعد على إيجاد الحلّ المشترك بيانياً لجملة معادلتين، والبحث فيه أنشطةٌ وتدريبات تساعد على التّعلم.

تذكّر

مجموعة الأعداد الحقيقية نرمز لها بـ $\mathbb{R}$

نرمز بـ D لمجموعة جزئية محتواة أوتساوي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ونكتب $D \subseteq \mathbb{R}$

كثيرا مانستخدم تعابير تدل على فكرة التابعية مثلاً نقول:

- عرض النّابض الشاقولي وتعليق أوزان مختلفة به وملاحظة أنّ لكلّ وزن استطالة تقترن به.
- الضّغط الجوي يتبع ارتفاع المكان عن سطح البحر.
- الثّمن الإجمالي لسلعة ما تابع لسعر المفردة.

نشاط

إذا كان سعر كيلو غرام واحد من البرتقال في محل تجاري 25 ل. س

1. في الجدول المجاور:

- المجموعة X تمثّل كميات باعها صاحب المحل التجاري مقدّرة بالكيلوغرام.
- المجموعة Y تمثّل مجموعة من المبالغ مقدّرة بالليرات السورية
- اقرن كلّ مبلغ بالكمية التي تمثّل ثمن شرائها وذلك برسم سهم ينطلق من الكمية وينتهي عند المبلغ. (لاحظ أنّ المبلغ تابع للكمية).

x	y
3	75
	100
4	125
	150
5	200

2. هل كلّ عنصر من المجموعة X اقترن به عنصرٌ واحد فقط من المجموعة Y ؟

3. نُسمّي ثمن البرتقال تابعاً ونرمز إاليه بـ f (مثلاً) ونُرمز إلى ثمن البرتقال الذي وزنه x بـ $f(x)$ ونجد $f(x) = 25x$

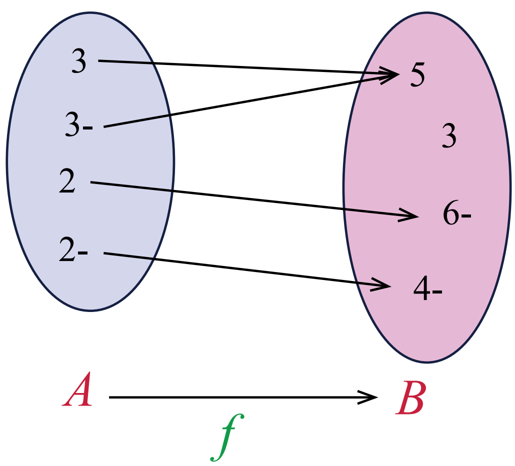
4 استنتج كلاً من $f(3), f(4), f(5)$.

- نعبر عن تابع الثمن كما يأتي: $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}: f(x) = 25x$
- نُسمّي المجموعة $\mathcal{X}$ مُنطلق (مجموعة تعريف) التابع f والمجموعة $\mathcal{Y}$ مستقر f
- ونُسمّي $f(x) = 25x$ قاعدة ربط هذا التّابع.

مثال

- إذا كانت A مجموعة من $\mathbb{R}$ وكانت B مجموعة من $\mathbb{R}$ وقرنا بكلِ عنصر من A بعدد حقيقي واحد من B، نكون اصطنعنا تابعاً عددياً

- نُسمّي A منطلق هذا التابع، ونُسمّي B مُستقرّه، إذا رمّزنا التابع بـ f ولقرين العدد الذي ينتمي إلى A بـ $f(x)$ الذي ينتمي إلى B يكون التّعبير الرّمزي للتابع: $f: A \to B: x \mapsto f(x)$



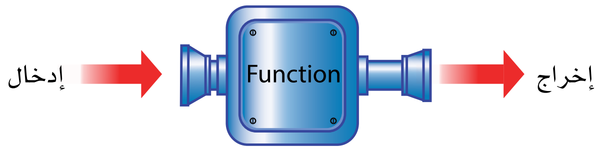
تعلّم

نعرف التابع f من D إلى $\mathbb{R}$ (بحيث $D \subseteq \mathbb{R}$) عددياً عندما بكلّ عنصر x من D عدداً وحيداً من $\mathbb{R}$ ونرمز له $f(x)$

- نُسمّي المجموعة D **مجموعة التعريف** (مُنطلق) التّابع.
- نُسمّي المجموعة $\mathbb{R}$ **مستقر** التّابع .
- نُسمّي $f(x)$ **صورة** x أونُسمّي **قيمة** عند x أوقرين العدد x
- والقاعدة التي تعيّن الصّورة تُسمّى **قاعدة ربط**
- يرمز إلى التّابع بأحرف: f, h, g
- التعبير الرمزي للتّابع العددي . $f: D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$
- إذا لم يُذكر مستقر التّابع العددي فهو $\mathbb{R}$

ملاحظة هامة

يمكن التعبير عن التابع بآلة يتم إدخال مادة ما إليها فتخرج بهيئة جديدة كما في الشكل التالي:



تطبيق

لتكن $D = [\ 0,\ +\infty[$ عندما نُقرن كلّ عنصر x من هذه المجموعة بجذره التربيعي نكون قد اصطنعنا التابع:

$f: D \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{x}$

1. **أكمل ما يأتي:**
   - ماذا يُسمّى المجال $D = [\ 0, +\infty\ [$ ؟
   - ماذا تُسمّى المجموعة $\mathbb{R}$ ؟
   - ماذا تُسمّى العلاقة $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

2. **أوجد القيم:**

$f(4) = ...$ $\qquad$ $f(0.49) = ...$

$f(3) = ...$ $\qquad$ $f(25) = ...$

3. **أوجد قيمة x التي تحقق $f(x) = 3$ ثُمّ أوجد العنصر x الذي صورته** $\sqrt{7}$

لايجاد قيمة x التي تحقق المعادلة $f(x) = 3$ نعوّض:

$f(x) = \sqrt{x}$ ومنه $3 = \sqrt{x}$ ونربع الطرفين $x = 9$

مثال

ليكن لدينا التّابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق القاعدة: $f(x) = x^2 + 1$

1. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(0)$، $f(-1)$، $f(5)$، $f(-6)$

2. أوجد مجموعة قيم هذا التّابع.

الحلّ

1. $f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(5) = (\ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$f(-6) = (\ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

2. إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإنَّ $x^2 > 0$ تكافئ

حسب خواص المتراجحات $x^2 + 1 \geq 1$ تكافئ $f(x) \geq 1$

إذاً: مجموعة قيم التّابع f هي $[\,1, +\infty\,[$

تدريب

ليكن لدينا التّابع العددي f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

1. اكتب قاعدة ربط التّابع على الشّكل $f(x) = (x + a)^2$.

2. أوجد مجموعة قيم التّابع f .

الدرس الثاني

التابع التآلفي

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. مفهوم التابع التآلفي.
2. أنواع التابع التآلفي.
3. التمثيل البياني للتابع التآلفي.

تعلّم

التابع التآلفي: هوالتّابع المُعرّف على $\mathbb{R}$ وقاعدة ربطه بالشكل:

$f(x) = a\,x + b$ حيث a, b عددان حقيقيان وإذا كان:

- $b = 0$ تصبح قاعدة الرّبط: $f(x) = a\,x$ ويُسمّى تابعاً **خطيّاً** .
- $b = 0$ و $a = 1$ تصبح قاعدة الربط: $f(x) = x$ ويُسمّى تابعاً **مطابقاً** .
- $a = 0$ تصبح قاعدة الربط: $f(x) = b$ ويُسمّى تابعاً **ثابتاً** .

تطبيق

املأ الجدول التالي:

نوعه (اسمه)	التابع
تابع تآلفي	$f(x) = 2x - 3$
تابع خطي	$f(x) = 3x$
تابع مطابق	$f(x) = x$
تابع ثابت	$f(x) = 3$
	$f(x) = 3x - 1$
	$f(x) = -2x$
	$f(x) = \sqrt{2}x - 1$
	$f(x) = \sqrt{3}$

مثال

ليكن لدينا التّابع العددي f المُعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x - 1$

1. ماذا يُسمّى هذا التّابع؟
2. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(0)$، $f(1)$، $f(-2)$
3. أوجد قيمة x التي تحقق $f(x) = 4$
4. اوجد قيمة x التي تجعل قيمة التّابع معدومة.

الحل

1. نسمي هذا التابع بـ تابع تآلفي
2. $f(-2) = (-2) - 1 = -3$

$$f(1) = (1) - 1 = 0$$

$$f(0) = (0) - 1 = -1$$

3. $f(x) = 4$

$$x - 1 = 4$$

$$x = 4 + 1$$

$$x = 5$$

4. $f(x) = 0$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

تدريب 1

ليكن لدينا التّابع العددي f المُعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = 2x + 1$

1. ماذا يُسمى هذا التّابع؟
2. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(0)$، $f(-2)$
3. أوجد قيمة x التي تحقق $f(x) = 3$
4. أوجد قيمة x التي تجعل قيمة التّابع معدومة.

الوحدة السابعة: التابع العددي

تدريب 2

ليكن لدينا التّابع العدديّ f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = 3x + 1$

1. ماذا يُسمّى هذا التّابع؟
2. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(-2)$، $f(\sqrt{2})$، $f(2)$
3. أوجد قيمة x التي تحقق $f(x) = -2$
4. اوجد قيمة x التي تجعل قيمة التّابع معدومة.

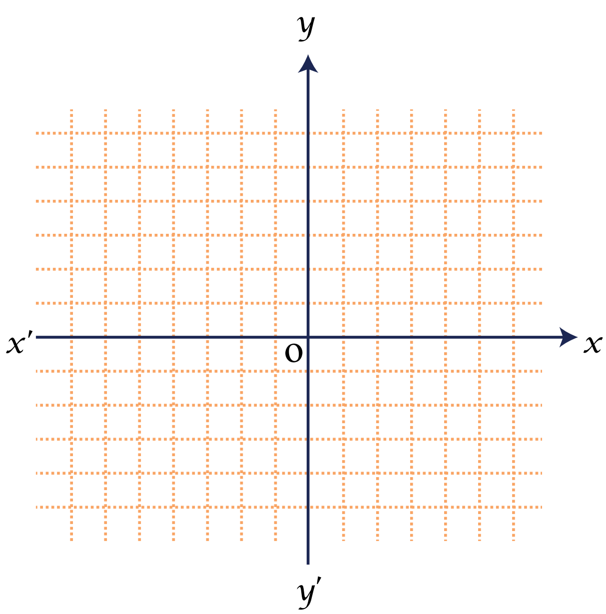
تعلّم

- نُسمي مجموعة الثّنائيات $(x, f(x))$ حيث x تتحوّل في مجموعة تعريف التّابع D بيان التّابع f .
- نُسمّي مجموعة النقط $M(x, f(x))$ التمثيل البياني للتّابع f.
- التمثيل البياني للتابع التآلفي هومستقيم ميله $(m = a)$.

تدريب 1

ليكن التابع العددي f المعرّف على $[0, +\infty[$ وفق قاعدة الربط $f(x) = x$

1. أوجد $f(0), f(1), f(2), f(3)$
2. عيّن الثنائيات $(0, f(0)), (1, f(1))$, $(2, f(2)), (3, f(3))$, ثم مثلها.
3. ارسم الخط البياني للتابع.



الحل

1. $f(0) =$

$f(1) =$

$f(2) =$

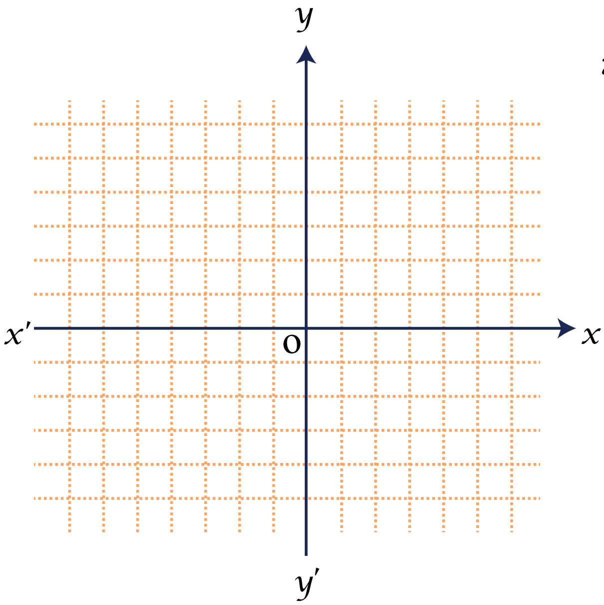
$f(3) =$

2. $(0, \ldots), (1, \ldots), (2, \ldots), (3, \ldots)$

تدريب 2

ليكن لدينا التابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = 2x - 3$

بيّن أنّ التمثيل البياني هو مستقيم، حدّد ميله، ثُمّ ارسمه.



الحل

....

....

....

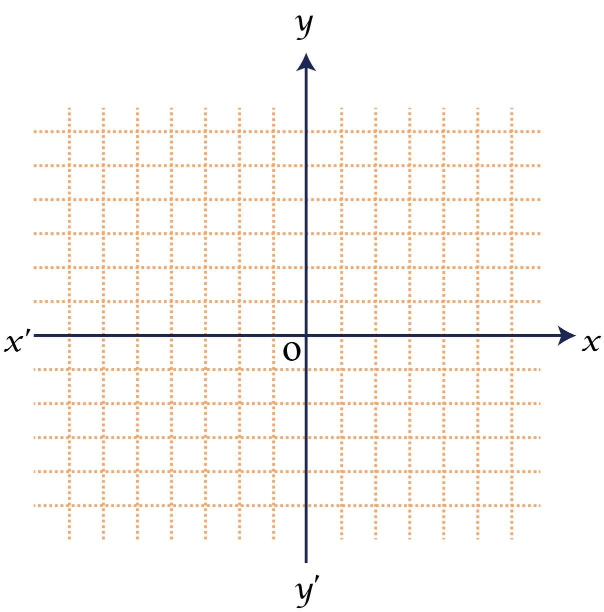
....

....

تدريب 3

ليكن لديناالتابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = 2x + 1$ والمطلوب:

بيّن أنّ التمثيل البياني هو مستقيم، حدّد ميله، ثُمَ ارسمه.



الحل

....

....

....

....

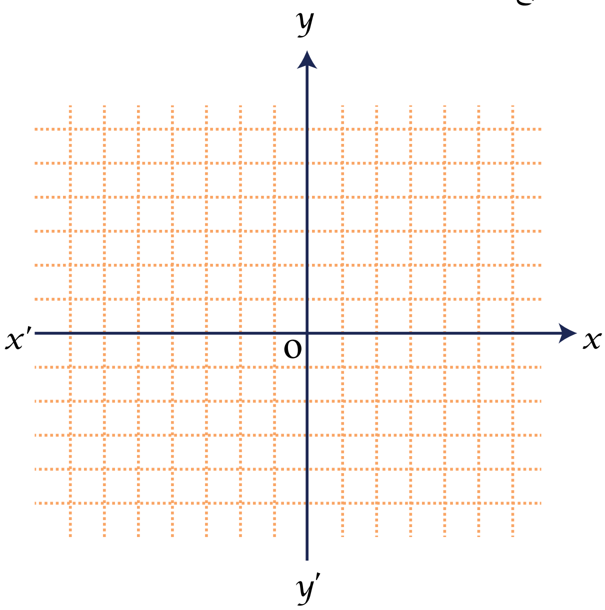
....

....

تدريب 4

ليكن لدينا التابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = 2$ والمطلوب:

1. ما اسم هذا التابع؟
2. ارسم في المستوى الإحداثي المجاور التمثيل البيانيّ لهذا التابع.



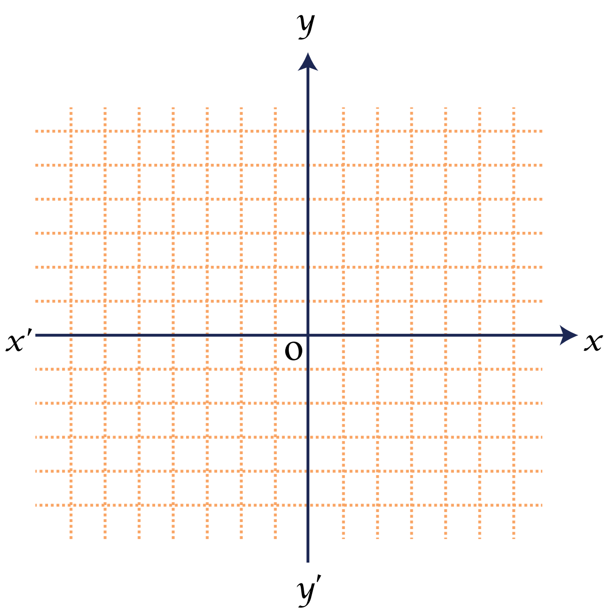
الحل

....
....
....
....
....
....

تدريب 5

ليكن لدينا التابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = x$ والمطلوب:

1. ما اسم هذا التابع؟
2. علّل أنّ التمثيل البياني لهذا التابع مستقيم (Δ)، ثُمّ ارسمه.
3. ما ميل المستقيم (Δ)؟



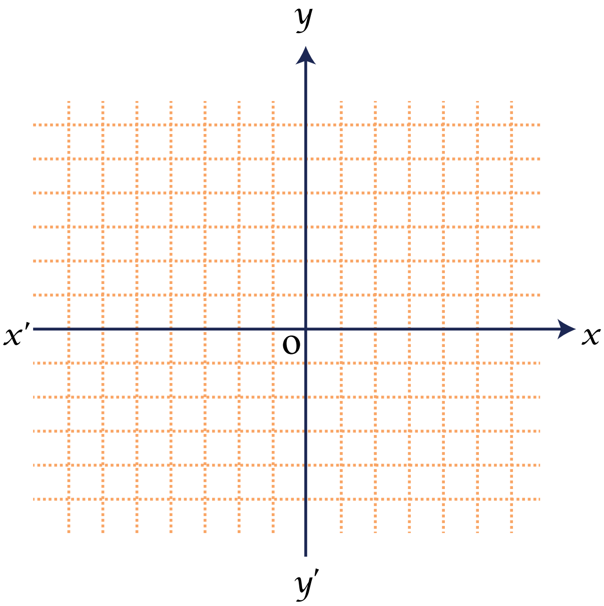
الحل

....
....
....
....
....
....
....

تدريب 6

ليكن لدينا التابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = 2x$

1. ما اسم هذا التابع؟
2. علّل أنّ التمثيل البياني لهذا التابع مستقيم (Δ)، ثُمّ ارسمه.
3. ما ميل المستقيم (Δ)؟



الحل

....

....

....

....

....

....

....

الدرس الثالث

التابع التربيعي

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. مفهوم التابع التربيعي.
2. التمثيل البياني للتابع التربيعي.

أولاً: التابع التربيعي

تعلّم

التابع التربيعي: هوالتابع العددي المُعرّف على $\mathbb{R}$ وقاعدة ربطه بالشّكل:

$f(x) = a x^2 + b x + c$

بحيث a, b, c أعداد و$a \neq 0$

نشاط

املأ الجدول التالي:

التابع	a	b	c
$f(x) = x^2 + 2x + 1$	1	2	1
$f(x) = x^2 + 4x$			
$f(x) = x^2 - 1$			
$f(x) = x^2$			
$f(x) = - x^2$			

مثال

ليكن لدينا التّابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x^2 + 1$

1. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(-6)$، $f(5)$، $f(-1)$، $f(0)$
2. أوجد مجموعة قيم هذا التابع.

الحل

1. $f(-6)=(-6)^2+1=36+1+37$

$f(5)=(5)^2+1=25+1=26$

$f(-1)=(\ldots)^2+1=\ldots+1=\ldots$

$f(0)=(\ldots)^2+1=\ldots+1=\ldots$

2. نعلم أنّ: $x^2\geq 0$

فيكون: $x^2+1\geq 0+1$

أي أنّ: $f(x)\geq 1$ ومنه فإنّ مجموعة قيم التابع هي $[1,+\infty[$

نشاط

ليكن لدينا التّابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x^2-2$

1. أوجد كلاً ممّا يأتي: $f(-3)$، $f(2)$، $f(-4)$، $f(0)$
2. أوجد مجموعة قيم هذا التابع.

الحل

1. $f(-3)=(-3)2-2=9-2=7$

$f(2)=$

$f(-4)=$

$f(0)=$

2. نعلم أنّ: $x^2\geq 0$

فيكون: $\ldots\geq\ldots$

أي أنّ: $f(x)\geq\ldots\ldots$

ومنه فإنّ مجموعة قيم التابع f هي: $[\ldots,\ldots[$

مثال

ليكن لدينا التّابع f المُعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x)=x^2+2x+1$

1. اكتب قاعدة ربط التابع على الشكل $f(x)=(x+a)^2$.
2. أوجد مجموعة قيم التابع f .

الحلّ

$$f(x) = (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 = (x+1)^2$$

$$(x+1)^2 \geq 0$$

$$f(x) \geq 0$$

ومنه فإنّ مجموعة قيم التابع f هي $[0, +\infty[$

تدريب 1

ليكن لدينا التّابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = x^2 - 6x + 9$

1. اكتب قاعدة ربط التابع على الشكل $f(x) = (x+a)^2$.
2. أوجد مجموعة قيم التابع f .

تدريب 2

ليكن لدينا التّابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = (x-3)^2$

أكمل ما يأتي:

1. يُسمّى هذا التابع تابعاً تربيعياً لأنّه يُكتب على شكل: $f(x) = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots$
2. $f(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$، $f(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$، $f(6) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. إذا كان $f(x) = 0$ فإنّ $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. إذا كان $f(x) = 9$ فإنّ $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ أو $x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

تمرين

ليكن لدينا التّابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة: $f(x) = (x-1)^2$

أكمل ما يأتي:

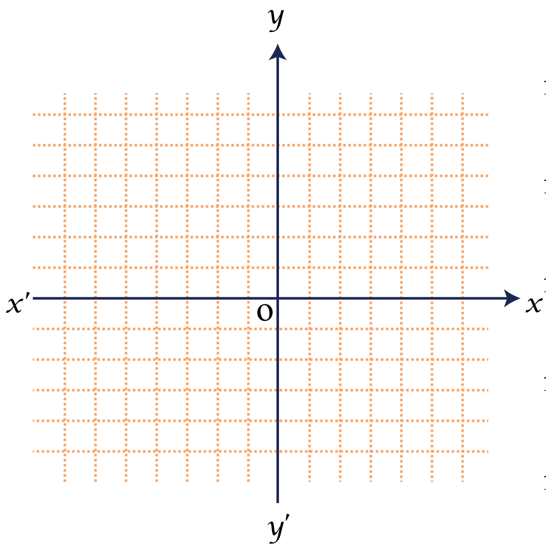
1. يُسمّى هذا التابع تابعاً تربيعياً لأنّه يُكتب على شكل: $f(x) = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots$
2. $f(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$، $f(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$، $f(-2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. إذا كان $f(x) = 0$ فإنّ
4. إذا كان $f(x) = 4$ فإنّ

ثانياً: الخط البياني التابع التربيعي

نشاط

ليكن لدينا التابع العددي f المعرّف على وفق قاعدة الربط: $f(x) = x^2$

1 احسب:



$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

أكمل الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

2 مثل الثنائيات التي أوجدتها بالجدول في المستوي الإحداثي.

3 هل تقع هذه النقط على مستقيم واحد؟

4 ارسم الخط البياني للتابع.

تعلّم

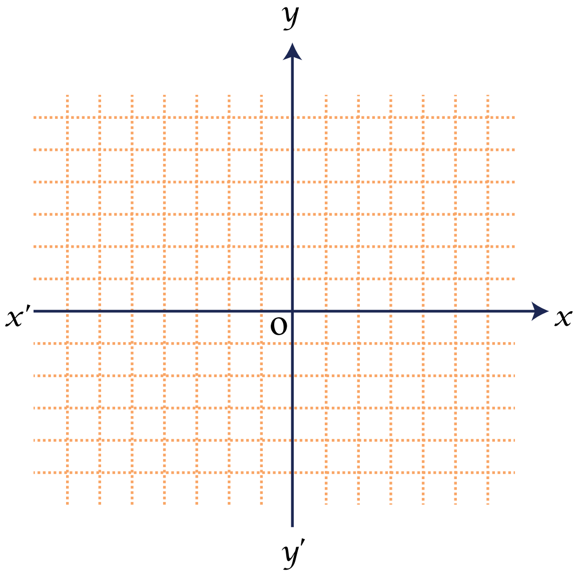
يُسمّى الخطّ البياني للتابع التربيعي $f(x) = x^2$ المُعرّف على $\mathbb{R}$ قطعاً مكافئاً.

نقبل أنّ الخطّ البياني للتابع التربيعي هوقطع مكافئ.

تدريب 1

ليكن لدينا التابع العددي f المعرف على وفق قاعدة الربط:

$f(x) = -x^2$



1 احسب

$f(-2) =$

$f(-1) =$

$f(0) =$

$f(1) =$

$f(2) =$

أكمل الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

2 مثل الثنائيات التي أوجدتها بالجدول في المستوي الإحداثي.

3 هل تقع هذه النقط على مستقيم واحد؟

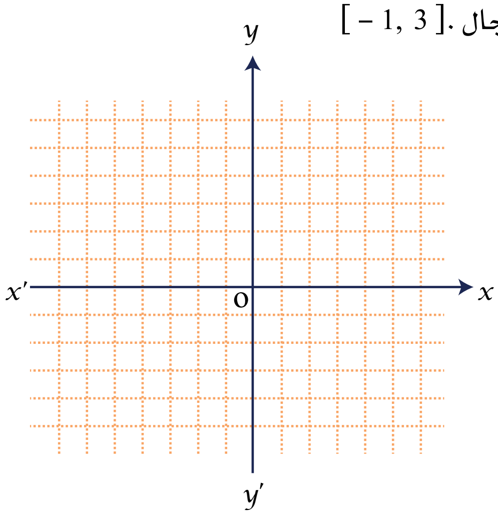
4 ارسم الخط البياني للتابع.

تدريب 2

ليكن لدينا التابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = (x-1)^2$

1 ماسم هذا التابع؟

2 ارسم الخط البياني للتابع مستعيناً بنقاط فواصلها ضمن المجال $[-1, 3]$.



الحل

....

....

....

....

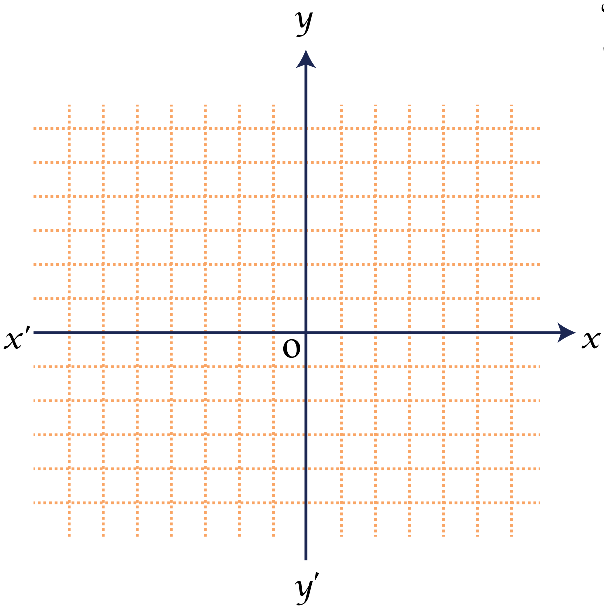
....

....

x					
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

تدريب 3

ارسم في المستوي الإحداثي التمثيل البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x - 2)^2$ مستعيناً بنقاطٍ فواصلها ضمن المجال $[0, 4]$.



الحلّ

....

....

....

....

....

....

....

x					
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

تدريب 4

ارسم الخط البياني للتابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط:
$f(x) = x(x-2)+1$ مستعيناً بنقاط فواصلها في المجال
$[-1, 3]$.

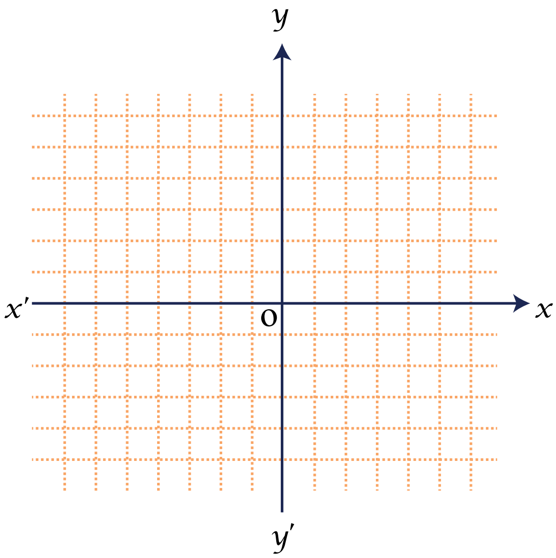
الحلّ

....

....

....

....

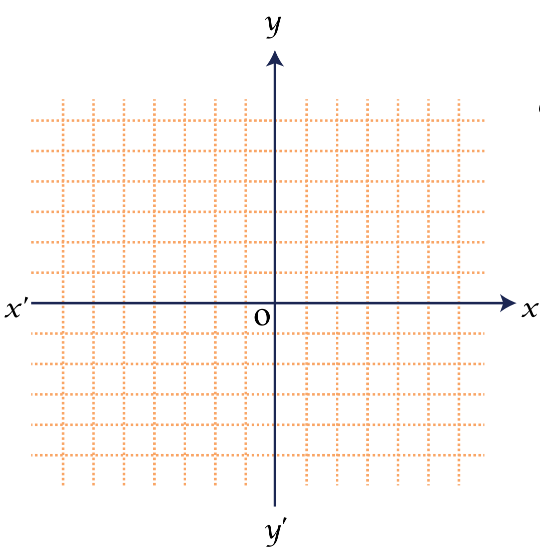


x					
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

تدريب 5

ليكن لدينا التابع h المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $h(x) = -x^2 + 2x - 3$

1. أوجد الأعداد $h(1), h(-2), h(5)$
2. أوجد قيم التابع عندما $x = -3$, $x = \sqrt{3}$, $x = 0$
3. ارسم الخط البياني للتابع مستعيناً بنقاط فواصلها ضمن المجال $[-1, 3]$.



الحل

....

....

....

x					
$f(x)$	....	....	....	....	....
$(x, f(x))$	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)	(..., ...)

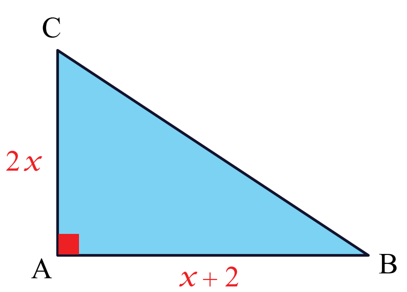
تدريب 6

ماذا تُسمّى كلّ من التوابع المُعرفة على $\mathbb{R}$ والمعينة بقواعد الرّبط الآتية:

1. $f(x) = x\sqrt{3} + 1$
2. $g(x) = x(x+5)$
3. $h(x) = (x+2)^2$
4. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x$
5. $d(x) = (x+4)(x-4)$
6. $u(x) = 7$

تدريب 7

الشكل المجاور مُثلث قائم فيه $AB = x+2,\ AC = 2x$



1. أوجد مساحة المُثلث ABC بدلالة x .
2. اكتب تابع مساحة هذا المُثلث من أجل $x \in]0, +\infty[$
3. أوجد مساحة المُثلث ABC عندما $x = 2$.

تذكّر

مساحة المثلث القائم: تساوي نصف جداء طولي ضلعيه القائمين

تدريب 8

ليكن لدينا التابع f المُعرّف على $\mathbb{R}$ وفق قاعدة الربط: $f(x) = 3x^2 + 1$

أياً من النقاط الآتية تنتمي إلى التمثيل البياني لهذا التابع: $A(0, 1),\ B(0, 2),\ C(-1, 4)$ ؟

اختبار وحدة التابع العددي

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

أ. إذا كان التابع العددي: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ فإنّ مجموعة تعريفه:

1 $\mathbb{R}$ 2 $]0, +\infty[$ 3 $]1, +\infty[$ 4 $]0, 1[$

ب. إذا كانت قاعدة ربط التابع العددي: $f(x) = (x+4)^2$ فإنّ صورة العدد a هي:

1 $a^2 + 16$ 2 $a + 4$ 3 $a^2 + 8a + 16$ 4 $4a$

ج. إذا كان التابع f مُعرّفاً على $\mathbb{R}$ ومعيّناً بالعلاقة $f(x) = (x+3)^2 - x^2$

1 تربيعياً 2 خطيّاً 3 تآلفياً 4 ثابتاً

د. الخط البياني للتابع العددي المعرّف على $\mathbb{R}$ والمعيّن بالعلاقة: $f(x) = x + 1$

1 مستقيم يمرّ بالنقطة $A(0, 1)$ 3 مستقيم ميله: $m = 1$

2 قطع مكافئً

هـ. التابع العددي المعيّن بقاعدة الربط: $f(x) = 3$ مجموعة قيمه هي:

1 $\{-3\}$ 2 $\mathbb{R}$ 3 $]-3, +\infty[$ 4 $\{3\}$

السؤال الثاني: ليكن التّابع العددي f المُعرّف على $\mathbb{R}$ والمعيّن بالعلاقة: $f(x) = x + 1$**: والمطلوب:**

1. ماذا يُسمى هذا التّابع؟

2. أوجد صورة كلّ عدد من الأعداد: $3, \sqrt{2}, \frac{1}{2}$

3. ارسم الخط البياني لهذا التابع.

السؤال الثالث: ليكن التّابع العددي المُعرّف على $\mathbb{R}$ والمعيّن بالعلاقة: $f(x) = x^2 + 4x + 4$ **والمطلوب:**

1. اكتب قاعدة ربط هذا التابع على الشكل: $f(x) = (x + a)^2$

2. عيّن الصور الآتية: $f(0), f(-2)$.

3. ارسم الخط البياني لهذا التابع مستعيناً بالنقاط التي فواصلها ضمن المجال $[-6, 2]$.

انتهت الأسئلة

طرائق العدّ

عزيزي الطالب / عزيزتي الطالبة، هيا بنا نتعرف على مانريد أن نتعلمه:

1. المبدأ الأساسي في العدّ ومخطط الشجرة.
2. التباديل والتراتيب.
3. التوافيق.

أولاً: المبدأ الأساسي في العدّ ومخطط الشجرة

تذكّر

إذا أمكن القيام بعمل ما بطرائق عددها n طريقة ومن أجل كلّ طريقة من هذه الطرائق أمكن القيام بعمل آخر بطرائق عددها m طريقة فإنّ:

عدد طرائق القيام بالعملين معاً هو: $n \times m$ طريقة

مثال محلول 1

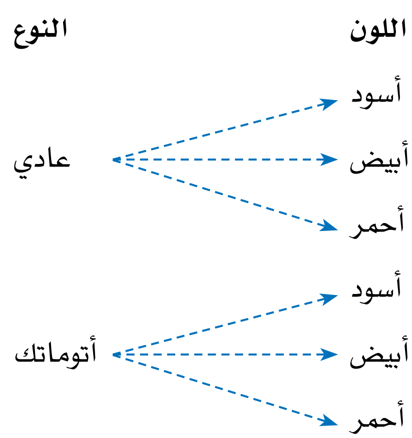
مصنع للسيارات ينتج نوعين من السيّارات: عادي وأتوماتك وينتج من كلّ نوع ثلاثة ألوان: أسود وأبيض وأحمر، فبكم طريقة يمكن أن يختار محمد سيارة واحدة بأحد الألوان ليشتريها؟

الحل

- عدد طرائق اختيار النوع يساوي طريقتين (عادي واتوماتك)
- عدد طرائق اختيار اللون يساوي ثلاث طرائق (أسود، أبيض، أحمر)

أي يكون لدينا مخطط الشجرة التالي: والذي يمكن من خلاله معرفة هذه الطرائق وعددها

وبحسب المبدأ الأساسي في العد: يكون عدد طرائق اختيار سيّارة بأحد الألوان يساوي: طريقة $2 \times 3 = 6$



مثال محلول 2

لدينا مجموعة من الأرقام { 4, 7، 3، 2 }

1. كم عدداً مؤلفاً من 3 أرقام يمكن تكوينه: إذا كانت أرقام العدد مختلفة
2. كم عدداً مؤلفاً من 3 أرقام يمكن تكوينه: إذا أمكن تكرار الرقم
3. كم عدداً زوجياً مؤلفاً من 3 منازل يمكن تكوينه

الحل

1. أرقام العدد مختلفة:

- عدد طرائق اختيار الآحاد: 4 طرائق
- عدد طرائق اختيار العشرات: 3 طرائق
- عدد طرائق اختيار المئات: 2 طريقة

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ: عدد الطرائق: $4 \times 3 \times 2 = 24$ طريقة

2. إذا أمكن تكرار الرقم:

- عدد طرائق اختيار الآحاد: 4 طرائق
- عدد طرائق اختيار العشرات: 4 طرائق
- عدد طرائق اختيار المئات: 4 طرائق

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ: عدد الطرائق: $4 \times 4 \times 4 = 64$ طريقة

3. العدد زوجي: (تذكر: العدد الزوجي: آحاده زوجي)

- عدد طرائق اختيار الآحاد: 2 طرائق (أي العددين 4, 2)
- عدد طرائق اختيار العشرات: 4 طرائق
- عدد طرائق اختيار المئات: 4 طرائق

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ: عدد الطرائق: $2 \times 4 \times 4 = 32$ طريقة

مسائل

1. لدى طارق 3 سراويل، 5 قمصان، 7 أحذية، بكم طريقة يمكن له أن يختار (سروالاً وقميصاً وحذاءً)؟

2. حديقة لها خمسة أبواب والمطلوب:

   أ. بكم طريقة يمكن لشخص الدخول من باب والخروج من باب آخرغير باب الدخول؟

   ب. بكم طريقة يمكنه الدخول من باب والخروج من أي باب؟

3. كم عدداً طبيعياً مؤلفاً من أرقام المجموعة: $\{7, 5، 2، 4\}$ في الحالات التالية:

   أ. أرقام العدد مختلفة

   ب. يمكن تكرار الرقم

   ج. العدد زوجي

   د. يقبل العدد القسمة على 5

4. كم عدداً مؤلفاً من 5 منازل يمكن تكوينه من الأرقام $\{9، 6، 8، 2، 5\}$ إذا استعملنا الرقم لمرّة واحدة

ثانياً: التباديل والتراتيب

تذكّر

1. **تعريف التقابل**: التقابل من المجموعة X إلى المجموعة Y تعني:

   كلّ عنصر من X يقرن بعنصر وحيد من Y

   وكلّ عنصر من Y يقرن بعنصر وحيد من X

2. **التباديل**: إذا قابلنا عناصر مجموعة منتهية بمواقع (أماكن) مختلفة عددها يساوي عدد عناصر المجموعة، نسمي هذا التقابل تبديلا للمجموعة.

3. **التراتيب**: إذا قابلنا جزءاً من مجموعة بمواقع مختلفة عددها يساوي عدد عناصر هذا الجزء، نسمي هذا التقابل ترتيباً من المجموعة

مثال محلول 1

1. عدد تباديل 4 عناصر نرمز لها بـ P_4 وتحسب كما يلي: $P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

2. عدد تراتيب 6 عناصر مأخوذة ثلاثة ثلاثة ويرمز لها بـ $P\ (6 ،3)$ وتحسب كمايلي:

$$P(6 ،3) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

عدد العناصر المأخوذة وهو عدد المضاريب

عدد عناصر المجموعة

3 عدد تراتيب 5 عناصر مأخوذة اثنين اثنين:

$P\,(5\,،2) = 5 \times 4 = 02$

مثال محلول 2

بكم طريقة يمكن وضع ستة كتب على رف يتسع إلى ستة كتب.

الحلّ

$P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 027$

مثال محلول 2

لجنة مكونة من 4 طلاب نريد اختيار طالبين من هذه اللجنة بحيث يكون:

أحدهما رئيس والآخر نائب الرئيس لهذه اللجنة؟

الحلّ

$P\,(4\,،2) = 4 \times 3 = 12$

مسائل

1 أوجد كلاً من: $P(7\,،2),\ P_6،\ P_7،\ P\,(5\,،3)$

2 عائلة مؤلفة من ثمانية أشخاص نريد التقاط صورة تذكارية لها، بكم طريقة يمكن ترتيب اصطفافهم في نسق واحد لالتقاط الصورة.

3 12 شخص يتنافسون على 3 ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) بكم طريقة يمكن توزيع الميداليات عليهم؟

4 بطولة في الشطرنج تضم خمس فرق، بكم طريقة يمكن ترتيب مراكز هذه الفرق؟

5 هيئة عدد أفرادها 13 فرداً بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة إدارية منها مؤلفة من: (مدير، معاون، أمين سر، محاسب)

ثالثاً: التوافيق

مثال محلول 1

خالد أب لعائلة فيها 4 أبناء وهم: سناء، محمد، وليد، سمير، دُعي خالد لحضور مباراة كرة قدم وقُدّمت له 4 بطاقات دعوة، بكم طريقة يمكن لخالد أن يختار ثلاثة من أبنائه لمرافقته في حضور هذه المباراة؟

الحلّ

يشكّل أبناء خالد مجموعة هي: { سناء، محمد، وليد، سمير}.

يمكن أن يختار خالد الأبناء: { سناء، محمد، وليد }. أوالأبناء: { سناء، محمد، .... }.

أوالأبناء: { ....، وليد، .... }.

أوالأبناء: { ....، ....، .... }.

إذاً: عدد طرائق الاختيار يساوي 4 طرائق.

نُسمّي المجموعة { سناء، محمد، وليد } توفيقاً مكوّناً من ثلاثة عناصر، نرمز إلى عدد التوافيق المكوّن كلّ منها من 3 عناصر من مجموعة مكوّنة من 4 عناصر بالرمز: $C\ (4,\ 3)$، إذاً: $C\ (4,\ 3) = 4$

تعلّم

- **التوافيق**: هومجموعة جزئية من مجموعة منتهية.
- عدد التوافيق المكوّن كلّ منها من r عنصراً مأخوذة من مجموعة تحوي n عنصراً يعطى بالعلاقة:
- $C\,(n,r) = \dfrac{P\,(n,r)}{P_r} : r \le n$

مثال محلول 2

عدد توافيق 9 عناصر مأخوذة أربعة أربعة

$$C\,(9,4) = \frac{P\,(9,4)}{P_4} = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$$

تدريب

أوجد كلاً من: $C\ (7\ ,3)$ ، $C\ (5\ ,2)$

مثال محلول 3

بكم طريقة يمكن أن يختار طالب 3 أسئلة من ورقة امتحان تحوي 8 أسئلة؟

الحل

عدد الطرائق: $C\,(8,3)=\frac{P\,(8,3)}{P_3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ (طريقة)

ملاحظة

- نلاحظ عند حل المسألة: إذا لم يكن هناك أهمية للترتيب أوالاختيار عشوائي
- عندئذ نطبق التوافيق لحلّ المسألة .
- أما إذا كان هناك:

1. أهمية للترتيب
2. توزيع أدوار (رئيس، نائب رئيس، ...)
3. توزيع جوائز (ذهبية، فضية، برونزية)
4. إذا ذكر بشكل واضح في المسألة: بكم طريقة يمكن أن نرتب ذلك

في هذه الحالات نطبق التراتيب لحلّ المسألة.

مسائل

1. يحوي صندوق 8 بطاقات مختلفة الألوان، نسحب منها عشوائياً 4 بطاقات معاً، ما عدد النتائج التي يمكن الحصول عليها؟

2. هناك 10 أشخاص يقفون أمام مصعد يتسع إلى 3 أشخاص، بكم طريقة يمكن أن نختار منهم 3 أشخاص ليصعدوا فيه؟

3. لدينا 9 طلاب في البرلمان الطلابي،

- بكم طريقة يمكن اختيار وفد مؤلف من 5 طلاب لمقابلة مدير المدرسة؟
- بكم طريقة يمكن اختيار 6 تلاميذ من مجموعة تضم (8 أولاد، 5 بنات)؟

(**إرشاد:** مجموعة التلاميذ عددها 13 = 8 + 5)

توظيف التوافيق والمبدأ الأساسيّ في العدّ في حلّ مسألة

مثال

في مدرسة مؤلفة من 10 مدرسين، و8 مدرسات، نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 مدرسين، ومدرستين، كم عدد طرائق تشكيل هذه اللجنة؟

الحلّ

عدد طرائق اختيار المدرسين: (لاحظ الاختيار عشوائي)

$$C(10,3)=\frac{P(10,3)}{P_3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$$ (طريقة)

عدد طرائق اختيار المدرسات: (لاحظ الاختيار عشوائي)

$$C(8,2)=\frac{P(8,2)}{P_2}=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$ (طريقة)

وحسب المبدأ الأساسي في العدّ:

عدد الطرائق الكلية لاختيار أعضاء اللجنة = عدد طرائق اختيار المدرسين × عدد طرائق اختيار المدرسات

$120\times28=3360$ (طريقة)

مسائل

1. بكم طريقة يمكن اختيار 7 تلاميذ من مجموعة تضم 9 أولاد و6 بنات يكون فيها 4 أولاد و3 بنات؟
2. يحوي صندوق 10 كرات حمراء و3 كرات زرقاء، بكم طريقة يمكن اختيار 6 كرات حمراء، و3 زرقاء؟
3. مؤسسة فيها (24 موظفاً, 18 موظفة) نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 9 أعضاء بحيث (6 موظفين, 3 موظفات) بكم طريقة يمكننا اختيار هذه اللجنة؟
4. سلة تحوي أزهاراً (10بيضاء و12 زهرية)، بكم طريقة يمكننا تشكيل باقة مؤلفة من 7 أزهار (4 بيضاء, 3 زهرية)
5. مستشفى يضم (15 طبيباً و8 طبيبات)، بكم طريقة يمكننا تشكيل وفد مؤلف من (6 أطباء و4 طبيبات) للقيام بزيارة علمية لإحدى أرقى المستشفيات في أوربا

اختبار وحدة طرائق العدّ

السؤال الأول: دُلّ على الإجابة الصحيحة فيما يأتي (واحدة فقط صحيحة):

أ. $\frac{P(6,3)}{P(6,2)} =$

1. 1
2. $\frac{3}{2}$
3. 4
4. 6

ب. $C(5, 2) + C(5, 3) =$

1. $C(5, 5)$
2. $C(10, 5)$
3. $C(5, 1)$
4. $2C(5, 2)$

ج. ABCDEF سداسي مُحدّب، إنّ عدد أقطار هذا المُضلع:

1. $P(6, 2)$
2. $C(6, 2)$
3. $C(6, 2) - 6$
4. $P(6, 2) - 6$

د. يُراد تشكيل لجنة من 4 أعضاء من بين (8 طلاب و3 مدرسين)، على أن تضُم مدرساً واحداً، إنّ عدد الطرائق لتشكيل هذه اللجنة هو:

1. $C(8, 3) + C(3, 1)$
2. $P(8, 3) + P(3, 1)$
3. $C(8, 3) \times C(3, 1)$
4. $P(8, 3) + P(3, 1)$

السؤال الثاني: حلّ المسألة الآتية:

إذا كان n عدداً طبيعياً يحقق $P(n, 2)$، فأوجد n

انتهت الأسئلة

فريق العمل العلمي:
[إعداد وتحضير] مجموعة من المختصين التربويين من وزارة التربية في الجمهورية العربية السورية ووكالة الأمم المتحدة للإغاثة وتشغيل اللاجئين الفلسطينيين في الشرق الأدنى الاونروا ومنظمة الأمم المتحدة للطفولة اليونيسف

فريق العمل الفني:
[تنفيذ] مجموعة من الخبراء المختصين في اللغة العربية واللغة الإنكليزية والرياضيات والهندسة والرسم اليدوي والتصوير الضوئي والخط العربي والرسم الرقمي والتصميم الكرافيكي والإخراج الطباعي و إدارة المشاريع الفنية
[إنتاج] مركز بابل، شركة معروف للإنتاج الفني، دمشق، الجمهورية العربية السورية
[الموقع الإلكتروني] www.babel.productions

هذه الكتب مُخصصة لتقدّم مجاناً للأطفال وهي ليست للبيع.
تُساعد على التعلّم الذّاتيّ ولكنّها لا تُغني عن الكتاب المدرسيّ.